三次元座標計測（第6回）
2005年度大学院講義
2005年12月13日

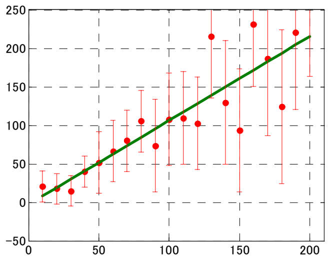
高増　潔
東京大学工学系研究科
精密機械工学専攻
E-mail: takamasu@pe.u-tokyo.ac.jp
HP: http://www.nano.pe.u-tokyo.ac.jp/

シミュレーション用のデータを作る（1次式）

- St = [10 10 10 10 20 20 20 20 30 30 30 40 40 40 40 50 50 50 50];
  各測定点の誤差の標準偏差
- xt = [1, 0];　真のパラメータ値
- n = length(St);　測定点の数
- x = [10:10:10*n];　測定点の位置
- yt = xt(1) * x + xt(2) + (randn(1, n) .* St);
  真のパラメータから計算した測定値に乱数を足す.
- yt = [20.6412 17.5461 14.8246 40.0973 51.4275 66.3307 79.9965 105.5617 73.5655 107.8243 109.6047 102.5921 215.4523 129.6953 93.6189 230.8040 186.2773 124.0480 221.0175 263.4891];
- qi1 = x';
- yi = yt';
- 誤差を考慮した場合と考慮しない場合
- S1 = eye(n) .* St(1) ^ 2;
- S2 = diag(St .^ 2);
- W1 = inv(S1);
- W2 = inv(S2);
- % A:ヤコビ行列, B:正規行列
- A = [qi1 ones(n, 1)];
- B1 = A' * W1 * A;
- b1 = A' * W1 * yi;
- x1 = inv(B1) * b1;
- B2 = A' * W2 * A;
- b2 = A' * W2 * yi;
- x2 = inv(B2) * b2;

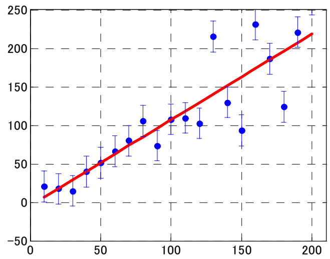
計算結果の表示（誤差を考慮した場合）

- カイ二乗検定
- v1 = yi - y1;　残差
- v2 = yi - y2;
- ss1 = v1‘ * W1 * v1　　S(x)の計算
- ss2 = v2' * W2 * v2
- ss1 / (n - 2)　自由度で割り算する
- ss2 / (n - 2)
- S(x)
  誤差を考慮しない: 237.1129
  誤差を考慮した:　　18.3313
- 自由度:　18
- S(x)/(n-m)
  誤差を考慮しない: 13.1729
  誤差を考慮した:　　1.0184
- 計算したパラメータ:
  傾き:　　1.0915
  切片:　　-2.8342



計算結果の表示（誤差を考慮しない場合）

- 測定誤差を推定する（標準偏差）
- 20個は測定する（95%に対応）
- 計算結果と測定誤差±2*標準偏差をプロットする
- 1つ程度が外れている（95%）ならOK
- 2つ以上が外れているなら, 測定誤差の推定かモデル化どちらかがおかしい
- 異常値？

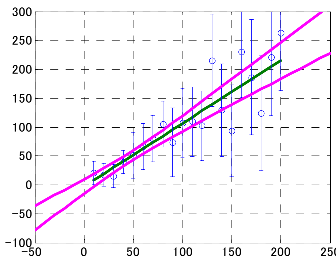


パラメータの分散共分散

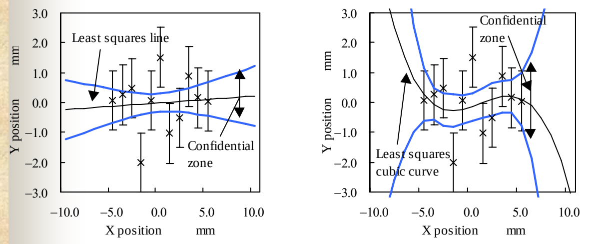
- Sx = inv(A' * W2 * A);
- Sx = inv(A’ * inv(S2) * A);
- パラメータの分散共分散行列
- ヤコビ行列Aと誤差行列Sのみで決まる（測定位置と測定誤差）
  測定値には影響されない
- Sx =　0.0101　-0.4772
  　　　-0.4772　39.7005
- パラメータの標準偏差相関係数行列
- d =　0.1003　-0.7548
  　　　-0.7548　6.3008
- 計算したパラメータ:
  傾き:　　1.0915 ±　0.2006
  切片:　-2.8342 ± 12.6016

モデルの存在範囲

- x = [-50:10:250];
- nn = length(x);
- for k=1:nn;
- 　　at = [x(k) 1];
- 　　Sy(k) = at * Sx * at';
- end;
- %Sy
- y2 = x2(1) .* x + x2(2);
- ssy = sqrt(Sy)
- xu = y2 + ssy .* 2;
- xl = y2 - ssy .* 2;
- plot(x, [xu; xl]);
- 内挿だけでなく, 外挿もできる.
- モデルが複雑だと外挿の精度は非常に悪くなる.



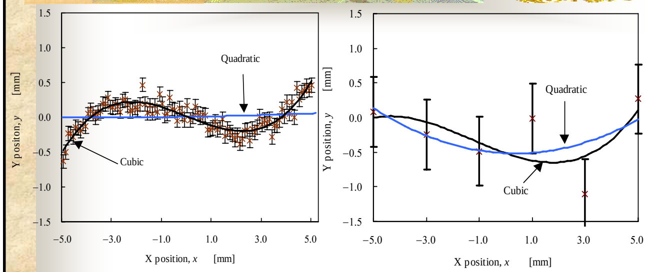
モデルの違い(1)



(a) (b)

- Extrapolation of the feature by approximate of (a) linear equation and (b) cubic equation; the number of measured point is 11 and the standard deviation is 1.0.

モデルの違い(2)



- 測定点が多い
- 測定の不確かさが小さい

- 測定点が少ない
- 測定の不確かさが大きい

まとめ

- 最小二乗法の計算
  - 線形:ヤコビ行列A, 誤差行列S, 測定値yからパラメータxを計算できる
  - 非線形:ガウスニュートン法と線形の場合によって計算する
- 計算結果の評価
  - 計算しただけではダメ, きちんと評価すべき
  - パラメータの分散共分散Sx:ヤコビ行列A, 誤差行列Sから計算できる(測定値yは関係しない)
  - χ^2検定により検定できる
  - 測定点以外の点における信頼性Spを計算できる:パラメータの分散共分散Sxから測定値への誤差伝播 すごく重要

- Sy(k) = at * Sx * at';

$$\mathbf{W}=\mathbf{S}^{-1}$$
$$\mathbf{B}=\mathbf{A}^t\mathbf{W}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{b}=\mathbf{A}^t\mathbf{W}\mathbf{y}$$
$$\hat{\mathbf{x}}=(\mathbf{A}^t\mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^t\mathbf{W}\mathbf{y})=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}}=(\mathbf{A}^t\mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}$$
$$\mathbf{S}_{\mathbf{p}}=\mathbf{A}_{\mathbf{p}}\mathbf{S}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}_{\mathbf{p}}^t$$

カイ二乗分布

- 平均値が 0, 分散 1 の標準正規分布に従う n 個の独立な確率変数 xi があるとき, その平方和 $\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ は は, 自由度 $\phi = n$ の χ^2 分布 と呼ばれる
- Γ()はガンマ分布

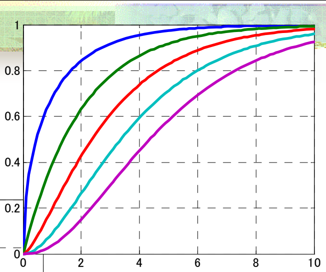
$$\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_n^2$$

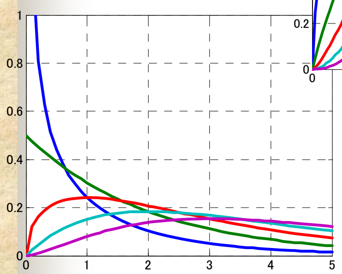
$$f(\chi^2,\phi)=\frac{\left(\chi^2\right)^{\frac{\phi}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{\phi}{2}}\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-x}\,dx$$

カイ二乗分布

- 確率密度関数(PDF)
- 累積分布関数(CDF)

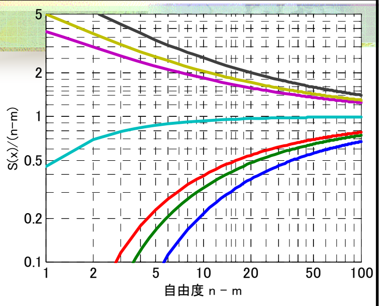




- 正規分布, ガウス分布 normal distribution, Gaussian distribution
- χ^2乗分布(カイ二乗分布) chi-square distribution
- 確率密度関数 probability density function, PDF
  - 積分すると1
  - CDFを微分するとPDF
- 累積分布関数 cumulative distribution function, CDF
  - 単調増加
  - −∞で0, ＋∞で1
  - PDFを−無限からその値までで積分するとCDF

カイ二乗検定

- x = [1:100];
- y1 = chi2inv(0.005, x) ./ x;
- y2 = chi2inv(0.025, x) ./ x;
- y3 = chi2inv(0.05, x) ./ x;
- y4 = chi2inv(0.5, x) ./ x;
- y5 = chi2inv(0.95, x) ./ x;
- y6 = chi2inv(0.975, x) ./ x;
- y7 = chi2inv(0.995, x) ./ x;
- loglog(x, [y1; y2; y3; y4; y5; y6; y7]);
- axis([1, 100, 0.1, 5]);



- 残差二乗和を自由度で割った値で検定できる.
- 安全には99%？
- 自由度は測定点数－パラメータの数

座標計測の課題

- 直交型のCMMは，成熟した測定機になりつつある.
- 測定機本体についての研究は，かなり充実している.
- 今後の課題は，CMMの使い方が中心となる.
  - 測定戦略，校正方法，トレーサビリティ
  - 測定の不確かさ解析
- 多くの要因
  - 温度，測定者，測定戦略，プローブ
  - 測定物，測定機本体，動的な運動
  - ソフトウェア，データ処理手法
  - 校正方法，補正方法
- 測定タスクに依存する（Task Related Uncertainty）

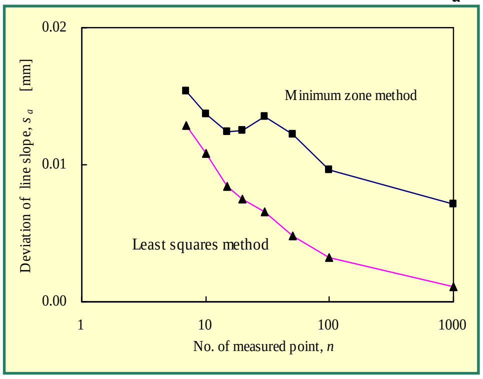
形体計測(Feature Based Metrology）

- 形体計測と形状計測の違い

	形体計測	形状計測
測定点の数	少ない（3 次元で 10～20）	多い（3 次元：1000～10000）
測定点の不確かさ	大きい	小さい
測定点の間隔	離散測定（大きい）	連続測定（小さい）
データ処理	外挿，最小二乗	フィルタ
形体モデル	必要	不要

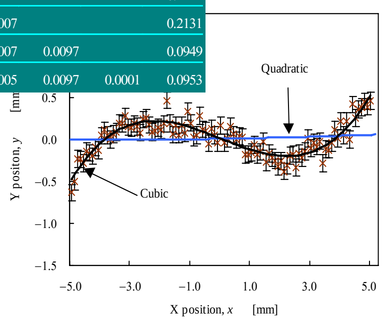
最小二乗法と最小領域法

- 測定点の数nと直線形体の傾きパラメータの標準偏差s_aの関係



形体モデルの推定(3次関数)

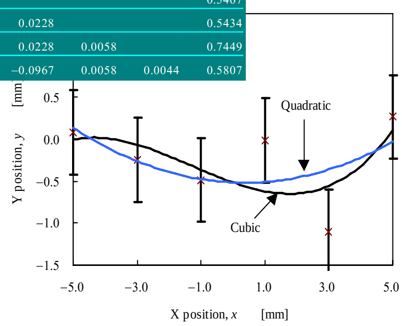
Equation	Coefficient 0	1st	2nd	3rd	4th	Standard deviation
Linear	0.0144	0.0063				0.2121
Quadratic	0.0086	0.0063	0.0007			0.2131
Cubic	0.0086	–0.1417	0.0007	0.0097		0.0949
4th	0.0117	–0.1417	–0.0005	0.0097	0.0001	0.0953



- 測定点が多い
- 測定の不確かさが小さい

形体モデルの推定(3次関数)

Equation	Coefficient 0	1st	2nd	3rd	4th	Standard deviation
Linear	–0.2496	–0.0167				0.5467
Quadratic	–0.5152	–0.0167	0.0228			0.5434
Cubic	–0.5152	–0.1345	0.0228	0.0058		0.7449
4th	–0.1588	–0.1345	–0.0967	0.0058	0.0044	0.5807



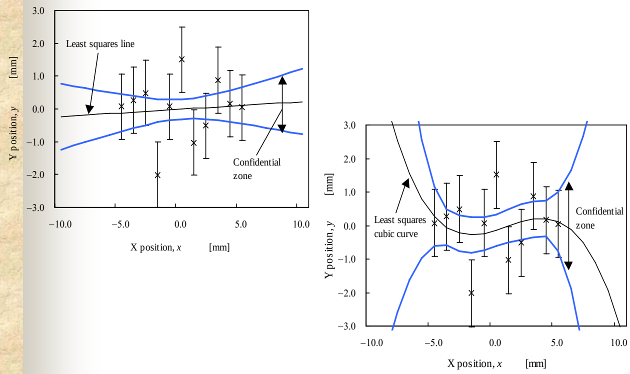
- 測定点が少ない
- 測定の不確かさが大きい

1点の測定の不確かさ

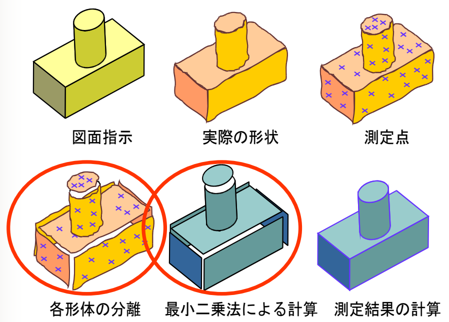
- 測定機に依存する誤差要因 s_h
  - 補正できなかった系統誤差
  - プロービングシステムの繰り返し誤差
- 形体に依存する誤差要因 s_f
  - 形体偏差
  - モデル

$$s_{ij} = s_j = \sqrt{s_h^2 + s_{f_j}^2}$$

形体モデルの外挿



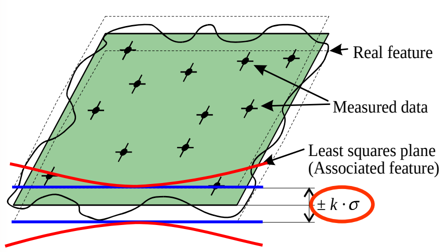
座標計測の基本的な手順



座標計測に統計的処理を導入する

- 形状偏差，測定の不確かさを含めた処理
- 前提
  - 測定点が少ない⇒相関がほとんどない.
  - 測定誤差が大きい⇒分離可能とはかぎらない.
正規分布で，標準偏差は分かっている.
  - 測定点が形体全体に均等に取れるとはかぎらない.
  - 測定対象の形体のモデルは分かっている.

平面の測定と平面度



一様な信頼性の幅を持つとは限らない

最小二乗法による形体の計算

観測方程式： $\mathbf{d} = \mathbf{Ap}$

正規方程式： $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Ap} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}$

最小二乗解： $\mathbf{p} = (\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}$

- A ヤコビ行列
- d 測定値ベクトル
- p パラメータベクトル
- S 測定値の分散行列

パラメータ，計算値の信頼性

$$\mathbf{S}_p = (\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A})^{-1}$$

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{A}\mathbf{S}_p\tilde{\mathbf{A}}$$

- S_p パラメータの誤差行列（分散）
- S_m 計算値の誤差行列（分散）
  最小二乗形体の信頼性の幅

直線のパラメータの評価

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{\sigma_0^2}\begin{pmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_0^2}\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \Sigma x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

原点の誤差

$$\mathbf{S}_p = \begin{pmatrix} \sigma_{p_1}^2 & \\ & \sigma_{p_2}^2 \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Sigma x_i^2} \end{pmatrix}$$

傾きの誤差

- 測定点は左右対称

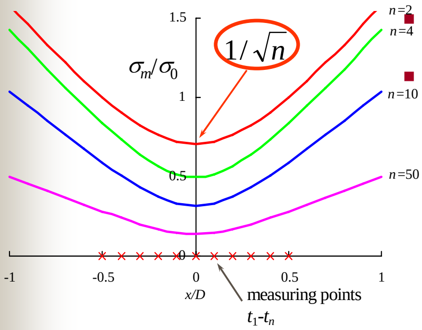
直線の信頼性の幅の計算

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{12(n-1)}{n(n+1)}\frac{x^2}{D^2}}\,\sigma_0$$

$$\sigma_m = \pm\sqrt{\frac{12(n-1)}{n(n+1)}}\frac{\sigma_0}{D}x$$

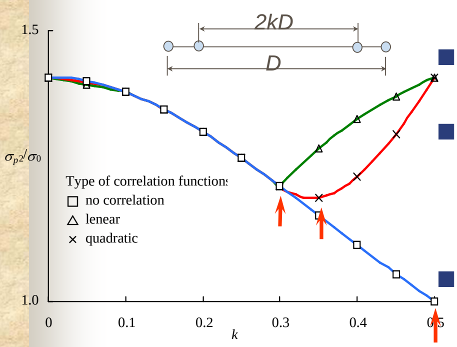
- 測定点は±Dの範囲で左右対称
- 測定点の誤差はσ_0
- 相関はない
- 漸近線

測定点数による信頼性の幅



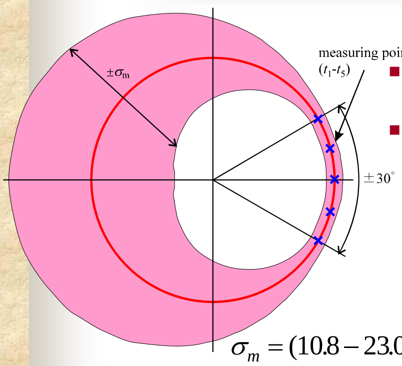
- n 個の測定点が範囲 Dに均等
- 横軸は D で正規化
- 縦軸はσ_0で正規化

測定点に相関がある場合



- 直線の傾きの誤差
- 4 個の測定点
  ±0.5D
  ±kD
- 相関関数：なし，1次，2次

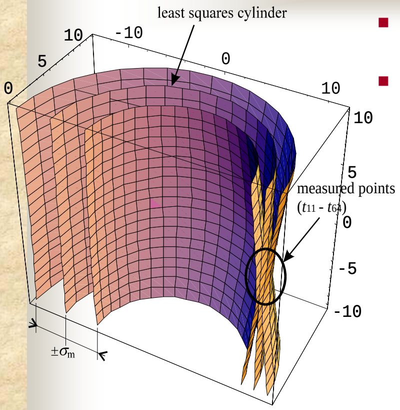
最小二乗円の信頼性の幅



- 5つの測定点t_1-t_5が±30°の範囲
- 最小二乗円の任意の位置での（計算値の）信頼性の幅

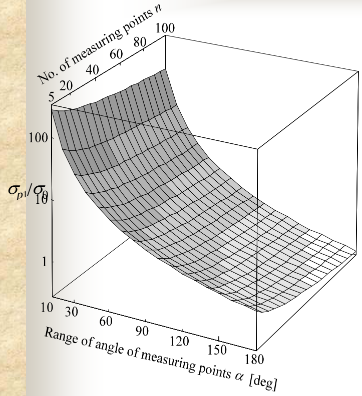
$$\sigma_m = (10.8 - 23.0\cos\theta + 12.7\cos^2\theta)^{1/2}$$

最小二乗円筒の信頼性の幅



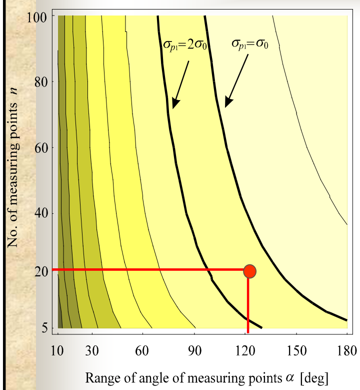
- 24の測定点が±90° ±5の範囲
- 最小二乗円筒の任意の位置での(計算値の)信頼性の幅

円の中心の誤差と測定点の位置



- 最小二乗円の中心のX座標の誤差（パラメータの信頼性）
- n個の測定点t_1-t_nが±α/2の範囲に均等にある.

中心座標の誤差(等高線)

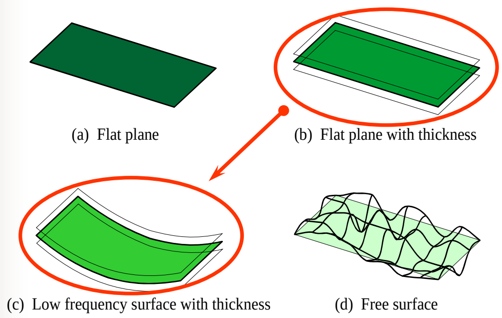


- パラメータの誤差がある条件
例えば

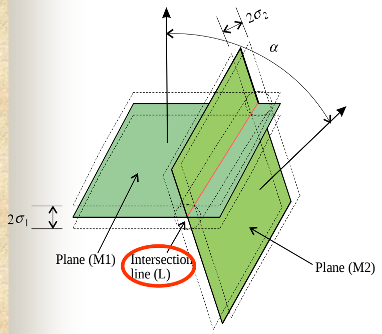
$$\sigma_{p_1} = 2\sigma_0$$

を満たす測定点の数，位置を導出できる.

実際形状のモデル

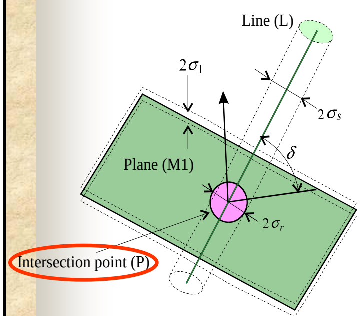


二平面の交線の真直度



$$\sigma_s = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sin\alpha}$$

平面と軸の交点の位置度



$$\sigma_r = \frac{\sqrt{\dfrac{1+\sin^2\delta}{2}\sigma_s^2 + \sigma_1^2}}{\sin\delta}$$