三次元座標計測（第8回）
2005年度大学院講義
2006年1月10日

高増　潔
東京大学工学系研究科
精密機械工学専攻
E-mail: takamasu@pe.u-tokyo.ac.jp
HP: http://www.nano.pe.u-tokyo.ac.jp/

ロボット校正の問題点

- ロボットの校正などの従来の研究を，座標測定機の校正として扱う場合の問題点として以下の3つをあげる．
  - トレーサビリティを考慮していない．
  - 測定誤差の影響を考慮していない．
  - 校正した機構の不確かさを評価していない．
- 不確かさの評価は，測定機においては不可欠であり，測定機の不確かさの評価がないと求めた測定値に対する不確かさを評価できない．
  - 座標測定機を校正するという立場から，アーティファクトを用いた校正を定式化することで，上記の3つの問題を解決する．

座標測定機の機構校正

- 座標測定機の機構校正
  - プローブの位置の三次元座標ができるだけ誤差なく求まればよい．
  - プローブ位置の誤差を最小にするように機構校正を行う．
- 幾何校正
  - 運動学校正（寸法校正）
    その機構の要素が幾何学的に誤差のない形状と見なせ，案内が完全である場合に，その機構の運動学を記述するのに必要な寸法パラメータ（長さ，位置および角度）を求める
  - 幾何偏差校正
    直線案内の真直度，回転誤差，スケールの誤差などの要素や案内の幾何偏差を記述するパラメータを求める
- 非幾何校正
  - 幾何校正以外のパラメータが対象となり，要素の温度による変化，力によるたわみ，動的な変化などを記述するためのパラメータ

座標測定機の機構校正の分類

classification		parameters
geometric calibration 幾何校正	kinematic calibration 運動学校正	size dimensions, positions, angular dimensions ...
	form-deviation calibration 幾何偏差校正	scale, straightness, pitching, yawing, rolling ...
non-geometric calibration 非幾何校正		deformation, clearance, dynamic effect ...

順運動学の式

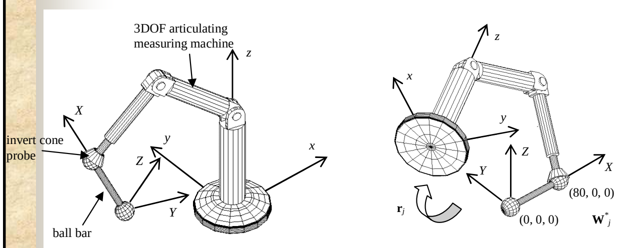
- f：順運動学（プローブ座標）
- p：運動学パラメータ（運動学校正で求めたいパラメータ）
- q：エンコーダの値（横座標）
- i：測定の回数

$$\mathbf{x}=\mathbf{f}(\mathbf{p},\mathbf{q})=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad \mathbf{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\end{pmatrix},\quad \mathbf{q}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_i=\mathbf{f}(\mathbf{p},\mathbf{q}_i)$$

測定機座標系からアーティファクト座標系へ

- 測定機座標系：xyz
- アーティファクト座標系：XYZ
- 回転，平行移動：r



アーティファクト座標系

- R：アーティファクト座標系への回転，平行移動
  r：回転，平行移動を示すパラメータ
- W：アーティファクトに値付けられている値に対応する座標
  W*：値付けられている値
  U：値付けられていない座標
- F：アーティファクト座標系における順運動学

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{R}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{R}(\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}_i))$$

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_i \\ \mathbf{U}_i \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}_i))$$

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q}_i, \mathbf{r}) = \mathbf{F}_i$$

最小二乗解

- 以下の議論では，アーティファクトを m 個の位置姿勢に配置して測定することを仮定するが，アーティファクトがすべて同じものでも，いくつかの違うものでも計算上の取り扱いは同じである．
- 複数のアーティファクト(j 個のアーティファクト)に拡張した式を用いる．
- ここで Fij は，j 番目のアーティファクトにおける i 番目の特徴点に対する測定を表す．最小二乗解を求めるには，ヤコビ行列，誤差行列，測定値ベクトルを求め，非線形最小二乗法の繰り返し演算を行う．

$$\mathbf{W}_{ij} = \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q}_{ij}, \mathbf{r}_j) = \mathbf{F}_{ij}$$

ヤコビ行列，測定値ベクトル

- ヤコビ行列A
  - Ap：パラメータに関連した部分
  - Ar：アーティファクト座標系に関連した部分(アーティファクトごとに変化する)
- 測定値ベクトルb
  - アーティファクトに値付けられた値との差をとる

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{F}_{1j}}{\partial \mathbf{p}} & \dfrac{\partial \mathbf{F}_{1j}}{\partial \mathbf{r}_j} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \mathbf{F}_{nj}}{\partial \mathbf{p}} & \dfrac{\partial \mathbf{F}_{nj}}{\partial \mathbf{r}_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Ap}_j & \mathbf{Ar}_j \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{Ap}_1 & \mathbf{Ar}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{Ap}_2 & 0 & \mathbf{Ar}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathbf{Ap}_m & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{Ar}_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{1j}^* - \mathbf{W}_{1j} \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{nj}^* - \mathbf{W}_{nj} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix}$$

誤差行列(1)

- アーティファクトを測定した場合の測定誤差の標準偏差：s_p
- アーティファクトの校正値の誤差の標準偏差：s_c
- エンコーダの読みの誤差の標準偏差：s_q
- 各座標の誤差は，s_p^2，s_c^2 および s_q^2 の座標への伝播の和となる．
- エンコーダの読みの誤差に関して相関(*sxy*，*syz*，*szx*)が生じるが，これらは，F を q で偏微分する

$$\mathbf{S}_j = \begin{pmatrix} sx_1^2 & sxy_1 & szx_1 & & & & \\ sxy_1 & sy_1^2 & syz_1 & & & 0 & \\ szx_1 & syz_1 & sz_1^2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & sx_n^2 & sxy_n & szx_n \\ & 0 & & & sxy_n & sy_n^2 & syz_n \\ & & & & szx_n & syz_n & sz_n^2 \end{pmatrix}$$

$$sx^2 = s_p^2 + s_c^2 + \left(\left(\frac{\partial F_x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial q_2} \right)^2 + \cdots \right) s_q^2$$

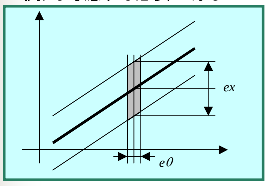
$$sxy = \left(\left(\frac{\partial F_x}{\partial q_1} \frac{\partial F_y}{\partial q_1} \right) + \left(\frac{\partial F_x}{\partial q_2} \frac{\partial F_y}{\partial q_2} \right) + \cdots \right) s_q^2$$

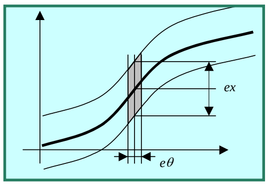
誤差行列(2)

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mathbf{S}_m \end{pmatrix}$$

エンコーダの読みの誤差の標準偏差：s_q

- エンコーダの読み：横座標
  - 横座標が観測方程式(順運動学)に与える影響は，横座標で順運動学を偏微分すればよい
  - 横座標の影響が，どこでもいっしょならば Sq は定数になるので，最小二乗解に影響しない．
  - 横座標の影響が場所によって違うと，最小二乗解に影響する．(誤差の大きいところは重みを減らす必要がある．)
  - 横座標の影響がXYZ座標に独立に与えられないときは，共分散(相関)も考慮する必要がある．



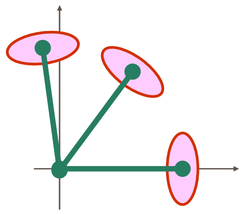


測定誤差の値と相関（1つの腕による測定）（1）

- 測定誤差
  - 位置の測定誤差など（XYで相関がなく，値も等しいような誤差）

  - エンコーダの誤差の影響

  - 両方の合計



測定誤差の値と相関（1つの腕による測定）（2）

- 測定における誤差
  - ex: 測定のX座標の誤差
  - ey: 測定のY座標の誤差
  - st: エンコーダの角度誤差
- 誤差行列
  - sx²: X座標の分散
  - sy²: Y座標の分散
  - sxy: X座標とY座標の共分散

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos t_1 \\ l_1 \sin t_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t_1} = -l_1 \sin t_1 \qquad \frac{\partial y}{\partial t_1} = l_1 \cos t_1$$

$$ex_i = ex + \frac{\partial x}{\partial t_1} et_1 \qquad ey_i = ey + \frac{\partial y}{\partial t_1} et_1$$

$$sx_i^2 = sx^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t_1}\right)^2 st_1^2 \qquad sy_i^2 = sy^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t_1}\right)^2 st_1^2$$

$$sxy_i = \frac{\partial x}{\partial t_1}\frac{\partial y}{\partial t_1} st_1^2 = l_1^2 \sin t_1 \cos t_1$$

非線形最小二乗法

- 以上のように計算した，ヤコビ行列 A，測定値ベクトル b，誤差行列 S によって，非線形最小二乗法を構成できる
  - まず，適当な初期値を p および r に与え，値を更新する
  - p の初期値は機構の設計値，q の初期値は機構の設計値を利用して計算した座標値から計算する
  - このループを繰り返し収束することで，パラメータの校正値を求めることができる．

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}^+ \\ \mathbf{r}_1^+ \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^+ \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^t\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{S}^{-1}\mathbf{b}, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{p}^+ \\ \mathbf{r}_1^+ \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^+ \end{pmatrix}$$

パラメータの評価

- パラメータの不確かさは，誤差伝播により求める
  - *Sp*：運動学パラメータの分散共分散
  - *Sr*：アーティファクト座標系への変換パラメータの分散共分散
  - *Spr*：それぞれのパラメータの共分散を表す
- 手先座標の不確かさを評価
  - 運動学パラメータの誤差から手先座標へ伝播する誤差 *Sm*
  - エンコーダの読みの誤差から手先座標へ伝播する誤差 *Sq*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_p & \mathbf{S}_{pr} \\ \mathbf{S}_{pr} & \mathbf{S}_r \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^t\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A})^{-1}$$

$$\mathbf{S}_m = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{S}_p \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}}\right)^t = \mathbf{A}_p \mathbf{S}_p \mathbf{A}_p^t$$

$$\mathbf{S}_q = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} s_q^2$$

アーティファクトの配置数

- 最小二乗法を成立させるために必要な測定回数
  - 運動学パラメータの数を *N*(p)
  - アーティファクト座標系へ変換するためのパラメータの合計数を *N*(r)
  - アーティファクトを測定したときに得られるデータの合計数を *N*(b)

$$N(\mathbf{b}) \geq N(\mathbf{p}) + N(\mathbf{r})$$

$$N(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{m} N(\mathbf{r}_j) = mN(\mathbf{r}_j)$$

$$N(\mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{m} N(\mathbf{b}_j) = mN(\mathbf{b}_j) = mnok$$

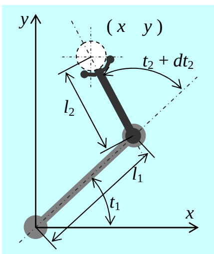
$$m \geq \frac{N(\mathbf{p})}{N(\mathbf{b}_j) - N(\mathbf{r}_j)} = \frac{N(\mathbf{p})}{nok - N(\mathbf{r}_j)}$$

2次元2自由度多関節機構の順運動学

- パラメータ
  - 第1の腕の長さ *l1*
  - 第2の腕の長さ *l2*
  - 2番目の腕に対するロータリーエンコーダの0点のオフセット *dt2*
- エンコーダ
  - 第1の腕と第2の腕の2つのロータリーエンコーダの読み *t1* と *t2*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ dt_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos t_1 + l_2 \cos(t_1 + t_2 + dt_2) \\ l_1 \sin t_1 + l_2 \sin(t_1 + t_2 + dt_2) \end{pmatrix}$$



ボールバーによる校正

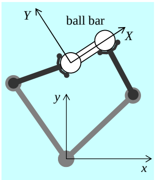
- ボールバーの座標系へ変換

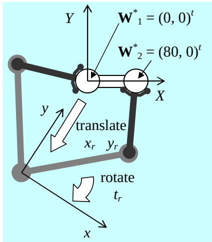
$$\mathbf{X} = \mathbf{W} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\mathbf{f}(\mathbf{p},\mathbf{q})) = \mathbf{F}(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r})$$

$$= \begin{pmatrix} l_1 \cos(t_1 + t_r) + l_2 \cos(t_1 + t_2 + dt_2 + t_r) + x_r \\ l_1 \sin(t_1 + t_r) + l_2 \sin(t_1 + t_2 + dt_2 + t_r) + y_r \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = (x_r, y_r, t_r)^t$$

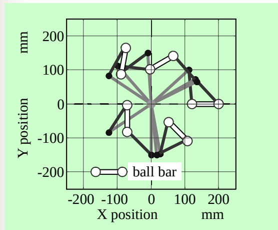
$$\mathbf{W}_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{W}_2^* = \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \end{pmatrix}$$

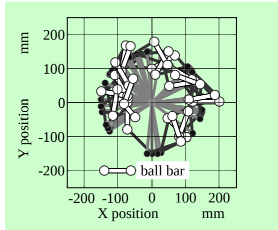




ボールバーによる校正例

- パラメータ
  - *l1* = 150 mm, *l2* = 100 mm, *dt2* = 0度
- 誤差（標準偏差）
  - アーティファクトの測定誤差 *sp* = 0.005 mm
  - 読みの誤差 *sq* = 0.001 度
  - ボールバーの値付けの誤差 *sc* = 0 mm



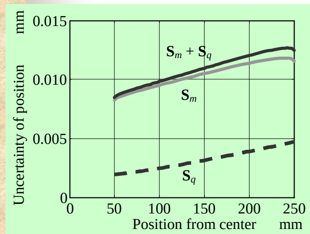


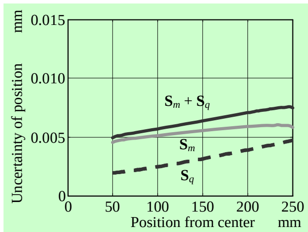
運動学パラメータの不確かさ

no. of ball bars	parameters	uncertainties (standard deviation)
5 (Fig. 6 (a))	length of 1st arm (l_1)	7.5 μm
	length of 2nd arm (l_2)	4.9 μm
	offset of 2nd encoder (dt_2)	0.0026 deg
20 (Fig. 6 (b))	length of 1st arm (l_1)	4.3 μm
	length of 2nd arm (l_2)	2.4 μm
	offset of 2nd encoder (dt_2)	0.0010 deg

手先座標の不確かさ

- 手先座標での不確かさ：測定機座標における中心からの距離の関数
  - 式（10）で計算できる
  - 破線がエンコーダの読みによる誤差 Sq
  - 薄い実線が運動学パラメータによる誤差 *Sm*
  - 濃い実線は2つの和（二乗和の平方根）





まとめ

- 三次元機構を座標測定機として用いる場合，アーティファクトによる校正における理論的な定式化を行った．さらに，校正結果に対する不確かさの評価手法を導出した．その結果以下のことが分かった．
  - 順運動学における運動学パラメータおよびアーティファクト座標系への変換パラメータを，最小二乗法によって計算する方法を定式化した．
  - 校正された機構の手先座標の不確かさを計算する方法を定式化した．
  - この計算手法により，座標測定機のアーティファクト校正における運動学パラメータの校正の理論的な手法を確立できた．
- 今後は，運動学パラメータ以外の幾何パラメータの校正や順運動学が解析的に解けないパラレルメカニズムへの応用を行い，アーティファクト校正を確立することを目指す．
  - パラレルメカニズムへの応用
  - 冗長測定機への応用
  - 校正後の測定の不確かさの評価方法の確立