

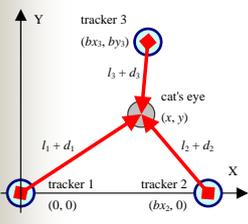
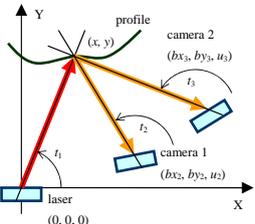
三次元座標計測(第9回) 2005年度大学院講義 2006年1月17日

高増 潔
東京大学工学系研究科
精密機械工学専攻
E-mail: takamasu@pe.u-tokyo.ac.jp
HP: http://www.nano.pe.u-tokyo.ac.jp/



冗長座標測定機(1)

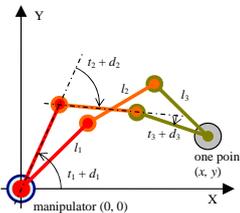
- 冗長性を持つ2次元座標測定機
 - 2次元2辺測量: 冗長性を出すために3つのレーザトラッカを配置し, キャッツアイまでの距離から座標を測定する
 - 2つのカメラ(2次元的なカメラ)とレーザスキャナ: 3つの角度測定システムによる座標測定
 - 3つの回転関節による2次元3自由度多関節機構

2006/1/17 三次元座標測定9回 2

冗長座標測定機(2)

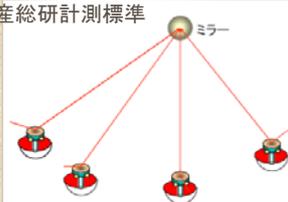
- 冗長性を持つ2次元座標測定機の校正
 - 2次元2辺測量, 3つの角度測定システム
 - 1つの校正点に対して複数のセンサが集まるような形になって, 校正点に対して複数の順運動学が存在
 - 1つの座標を複数の順運動学解で計算できるような冗長性を持った座標測定機を「冗長座標測定機」と呼び, 冗長座標測定機の自己校正について検討する
 - 2次元3自由度多関節機構
 - つながった腕が最終的に1つの校正点を測定する形で, 自由度が多いために校正点を複数の姿勢で測定できる
 - 閉ループを作って自己校正を行う場合で, 座標測定機のアーティファクト校正において, 1点を与えるアーティファクトを使用したのと等価である

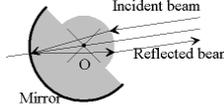


2006/1/17 三次元座標測定9回 3

4つのレーザトラッカによる座標測定機

産総研計測標準



2006/1/17 三次元座標測定9回 4

Leica LTD800

繰返し精度	±5μm/m
繰返し精度	±5μm/m
測定誤差	±10μm/m
絶対距離計による測定誤差	±25μm

The Local Positioning Technology-based Leica LTD800 enables wireless communication between individual Universal CMM components: Leica Laser Tracker, T-Probe & T-Span.

Non-head emitting tracker sensor head creates no errors induced by vibrations or temperature gradients.

Increased Leica Laser Tracker accuracy.

Internal temperature control renders external temperature influences irrelevant.

Laser tube with straight optical beam beam path for stable operation.

Precision distance measurement for fast point output of up to 3,000 points per second.

Extremely robust housing: impervious to environmental conditions.

Built on precision casters for better fit and vertical angle measurements.

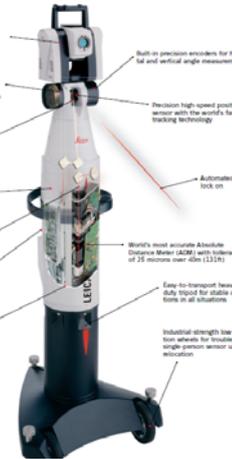
Precision high-speed positioning sensor with the world's best tracking technology.

Automated base lock on.

World's most accurate Absolute Distance Meter (ADM) with accuracies of 25 microns over 133m!

Easy-to-transport heavy-duty tripod for stable conditions in all situations.

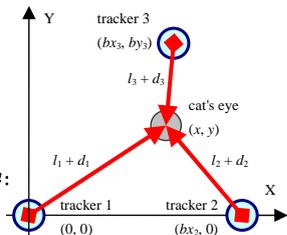
Industrial strength base for long-term use.



2006/1/17 三次元座標測定9回 5

冗長座標測定機の順運動学(1)

- 同じ座標に対して複数センサによる複数の順運動学が得られる
 - 2次元座標で考えると, センサ出力が k 個あるとその中の2個のセンサから順運動学が計算できる
 - 2個を選び出す kC_2 個の組み合わせがあり, それぞれの組み合わせに対応する順運動学の式は異なる
 - 冗長座標測定機の例として, 3つのレーザトラッカを取り上げ, その自己校正方法を考える
- レーザトラッカのパラメータ
 - レーザトラッカ1, 2および3の座標: $(0, 0)$, $(bx_2, 0)$, (bx_3, by_3)
 - レーザトラッカの測長距離: l_1, l_2, l_3
 - それぞれのオフセット: d_1, d_2, d_3
 - 運動学校正において求めるパラメータ: $bx_2, bx_3, by_3, d_1, d_2, d_3$ 6つ



2006/1/17 三次元座標測定9回 6

冗長座標測定機の順運動学(2)

- 最小二乗法の構成
 - 普通はレーザトラックの測長距離の誤差を最小にする
 - 自己校正の手法を一般化, 他の冗長座標測定機にも対応: 順運動学で計算された座標値の誤差を最小にする
 - 2つの方法の計算結果は完全に一致する
- 順運動学を f
 - 3つのレーザトラックの測定距離のどの2つを使うかにより3つの順運動学 f_a, f_b および f_c が存在する
 - f_a は l_1 と l_2 , f_b は l_2 と l_3 , f_c は l_3 と l_1 から座標値を計算する
 - 順運動学を表すパラメータ p とエンコーダの読み q は, それぞれの計算では一部しか使わないが, 共通のベクトルとして考える

$$x_a = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{ax}(p, q) \\ f_{ay}(p, q) \end{pmatrix} = f_a(p, q)$$

$$x_b = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{bx}(p, q) \\ f_{by}(p, q) \end{pmatrix} = f_b(p, q)$$

$$x_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{cx}(p, q) \\ f_{cy}(p, q) \end{pmatrix} = f_c(p, q)$$

$$p = (bx_2, bx_3, by_3, d_1, d_2, d_3)^t$$

$$q = (l_1, l_2, l_3)^t$$

2006/1/17 三次元座標測定9回 7

冗長座標測定機の自己校正(1)

- アーティファクト校正の基本となる順運動学の式
 - 測定機座標系をアーティファクト座標系へ変換するための平行移動と回転を r
 - F は r を含んだ順運動学
 - i はアーティファクトの持つ校正点の数
 - j はアーティファクトの位置や姿勢の数
- レーザトラックの例
 - 校正点はキャッツアイの座標の1つであるので i は不要
 - W_{ij} はアーティファクト座標系における校正点の座標
 - r ではキャッツアイの中心座標への平行移動だけで, 回転は含まない

$$W_{ij} = F(p, q_j, r_j) = F_{ij}$$

2006/1/17 三次元座標測定9回 8

冗長座標測定機の自己校正(2)

- 3つの順運動学に対応した3つの校正点が得られる
 - 座標値はXY座標を持つので, 値としては6つの値 ($x_a, y_a, x_b, y_b, x_c, y_c$) が得られる
 - エンコーダの値は3つ (l_1, l_2, l_3) のため, 独立しているのはこのうち3つである
 - 測定値として最低3つ使えば校正を行うことができる. 3つの測定値を使う場合は, 求めたいパラメータへの伝播の関係を考慮して, 3つを選択する必要がある
 - 今回の例では, 2つのX座標と1つのY座標を選択すればよい
 - 以下の説明では測定値として (x_a, y_a, x_b) を選択する
 - 4つ以上を選択した場合には, 測定誤差の分散共分散行列が従属になるため, 逆行列でなく擬似逆行列を使う必要があるが, 結果は3つの測定値を利用した場合と完全に一致する

2006/1/17 三次元座標測定9回 9

冗長座標測定機の自己校正(3)

- 順運動学の最終的な形

$$W_j = F_j = F(p, q_j, r_j) = \begin{pmatrix} f_{ax}(p, q_j) - x_j \\ f_{ay}(p, q_j) - y_j \\ f_{bx}(p, q_j) - x_j \end{pmatrix}$$

$$r_j = (x_j, y_j)^t$$

$$p = (bx_2, bx_3, by_3, d_1, d_2, d_3)^t$$

$$q_j = (l_{1j}, l_{2j}, l_{3j})^t$$

2006/1/17 三次元座標測定9回 10

最小二乗解の計算(1)

- (x_j, y_j) は j 番目の校正点におけるキャッツアイの座標値
 - この座標値がアーティファクト校正におけるアーティファクト座標系を表すパラメータとなる
 - 1つの測定において, 座標値を新しいパラメータとして追加しながら, 最小二乗法を構成すれば, 自己校正が行える
 - 1回の測定で, 1つだけ余分な式が得られるので, 6つのパラメータを求めるには6回以上の測定が必要となる
 - 基本的な最小二乗法の手法はこれまでと同じで, ヤコビ行列 A , 誤差行列 S , 測定値行列 b により非線形最小二乗法が構成できる

2006/1/17 三次元座標測定9回 11

最小二乗解の計算(2)

- ヤコビ行列 A

$$Ap_j = \frac{\partial F_j}{\partial p}$$

$$Ar_j = \frac{\partial F_j}{\partial r_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} Ap_1 & Ar_1 & 0 & \dots & 0 \\ Ap_2 & 0 & Ar_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ Ap_m & 0 & \dots & 0 & Ar_m \end{pmatrix}$$

2006/1/17 三次元座標測定9回 12

最小二乗解の計算(3)

■ 誤差行列S

- 誤差としては、測長距離 l_1, l_2 および l_3 にそれぞれ、独立で標準偏差 s_i を持つ偶然誤差を考える
- 実際には、距離によって誤差の大きさは変化するかも知れない。その場合は、 s_i を距離の関数として定義すればいい
- また、測定空間の温度分布やキャッツアイの方向誤差などの影響で、誤差間に相関がある場合も考えられる。その場合は、相関が分かればそれを考慮すればいい。
- 簡単のため、測定距離の誤差は、距離には無関係でレーザトラッカの相関はないと考える

最小二乗解の計算(4)

■ 誤差行列Sの全体

- S_j は j 番目のアーティファクトの測定に対応する分散共分散行列である。これを対角に並べることで誤差行列 S を計算できる
- S_j の計算では、 x_a, y_a, x_b の分散と共分散を計算する。計算式の一部として、 x_a の分散、 x_a と y_a の共分散および x_a と x_b の共分散の計算式を示す。その他の計算も偏微分により機械的に計算できる。

$$S_j = \begin{pmatrix} S_{x_a}^2 & S_{x_a y_a} & S_{x_a x_b} \\ S_{x_a y_a} & S_{y_a}^2 & S_{y_a x_b} \\ S_{x_a x_b} & S_{y_a x_b} & S_{x_b}^2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \dots \\ 0 & S_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

最小二乗解の計算(5)

■ 誤差行列Sの分散(s_{x_a})の計算

- x_a の分散の計算で、 x_a の計算に l_3 は使わないので、 l_3 による偏微分の項は零となり l_1 と l_2 の項に関係した分散が残る。

$$s_{x_a}^2 = \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_1}\right)^2 s_l^2 + \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_2}\right)^2 s_l^2 + \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_3}\right)^2 s_l^2$$

$$= \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_1}\right)^2 s_l^2 + \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_2}\right)^2 s_l^2$$

最小二乗解の計算(6)

■ 誤差行列Sの共分散($s_{x_a y_a}, s_{x_a y_b}$)の計算

- 同じ測定値におけるX座標とY座標の共分散である。この場合、 x_a と y_a の共分散では、 l_1 と l_2 がそれぞれ誤差を持っているので、計算されるX座標とY座標の誤差は互いに相関を持つ。
- 別々の測定値間の共分散である。別々の測定値においても共通した測定距離を使っていれば相関を持つ。 x_a と x_b の共分散では、両方に共通な測定距離である l_2 を使っているため、この項だけが有効である。

$$s_{x_a y_a} = \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_1} \frac{\partial y_a}{\partial l_1}\right) s_l^2 + \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_2} \frac{\partial y_a}{\partial l_2}\right) s_l^2 + \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_3} \frac{\partial y_a}{\partial l_3}\right) s_l^2$$

$$= \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_1} \frac{\partial y_a}{\partial l_1}\right) s_l^2 + \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_2} \frac{\partial y_a}{\partial l_2}\right) s_l^2$$

$$s_{x_a x_b} = \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_1} \frac{\partial x_b}{\partial l_1}\right) s_l^2 + \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_2} \frac{\partial x_b}{\partial l_2}\right) s_l^2 + \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_3} \frac{\partial x_b}{\partial l_3}\right) s_l^2$$

$$= \left(\frac{\partial x_a}{\partial l_2} \frac{\partial x_b}{\partial l_2}\right) s_l^2$$

最小二乗解の計算(7)

■ 測定値ベクトル b

- 測定値とアーティファクトに値付けられた校正値との差である。キャッツアイの座標に平行移動した後の校正値はすべて零なので、平行移動した測定値がそのまま測定値ベクトルとなる。

計算例の設定

■ 3つのレーザトラッカを利用した、座標測定機の自己校正

- レーザトラッカ1, 2および3の位置(単位は mm)をそれぞれ (0, 0), (100, 0), (50, 100)
- 測定誤差としては、レーザトラッカの測長距離の誤差だけを考え、標準偏差で $1 \mu\text{m}$ の正規分布を示す誤差を与えた。
- 測定範囲
 - 3つのレーザトラッカが作る三角形の 2.5 mm 内側
 - キャッツアイを測定範囲内に 10 mm 間隔, 5 mm 間隔, 2.5 mm 間隔, 2mm 間隔の格子点上に移動させ、校正に利用する校正点とした
 - 校正点の数は、それぞれ 41 個, 181 個, 722 個, 1058 個となった。

計算例の評価(1)

- いままで示したように、ヤコビ行列Aおよび誤差行列Sを求める
- 校正したパラメータの不確かさ
 - 誤差伝播により求めることができる
 - 測定値が含む誤差からパラメータの推定値への誤差伝播の式
 - S_p はパラメータの分散共分散, S_r はアーティファクト座標系への変換パラメータの分散共分散, S_{pr} はそれぞれのパラメータの共分散を表す。
 - S_p により、各パラメータがどのくらいの不確かさで校正されたかを評価することができる。

$$\begin{pmatrix} S_p & S_{pr} \\ S_{pr} & S_r \end{pmatrix} = (A^T S^{-1} A)^{-1}$$

2006/1/17

三次元座標測定9回

19

計算例の評価(2)

- 表は、校正点の数を41個から1058個に変化させた場合の6つのパラメータの誤差(標準偏差)の平均値と最大値を示す
 - 平均化効果

pitch of points	10 mm	5 mm	2.5 mm	2 mm
no. of point	41	181	722	1058
mean (μm)	9.1	4.0	2.0	1.7
max (μm)	12.5	5.5	2.7	2.3

2006/1/17

三次元座標測定9回

20

計算例の評価(3)

- 表には、校正点が722点の場合の6つのパラメータの標準偏差と相関係数を示している
 - 表の対角成分がパラメータの標準偏差で、1.6 μm から 2.7 μm
 - 相関係数は、 bx_2 と d_1 および by_3 と d_3 では、0.9 に近い大きな値となっていて、校正したパラメータに大きな相関が残っていることを示している。

	bx_2	bx_3	by_3	d_1	d_2	d_3
bx_2	1.7	0.3194	-0.1556	0.6068	0.6068	-0.3695
bx_3		2.7	-0.0497	0.9426	-0.5549	-0.1180
by_3			2.2	-0.0864	-0.0864	0.9735
d_1				1.6	-0.2593	-0.2191
d_2					1.6	-0.2191
d_3						2.2

2006/1/17

三次元座標測定9回

21

計算例の校正後の不確かさ評価(1)

- 校正後の測定点の評価
 - パラメータ推定値の分散共分散行列 S_p の測定点への伝播 S_m
 - レーザトラックの測長誤差の測定点への伝播 S_q
 - 評価したい座標に対応したヤコビ行列を A_p とすると、式によって、測定値が持つ分散共分散 S_{mq} を計算できる。
 - 3つの順運動学に対応した測定点において、それぞれXY座標が得られ全部で6つの座標値が計算されるので、 S_{mq} をは6×6の行列となる。

$$S_m = A_p S_p A_p^T$$

$$S_q = \frac{\partial F}{\partial q} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)^T s_l^2$$

$$S_{mq} = S_m + S_q$$

2006/1/17

三次元座標測定9回

22

計算例の校正後の不確かさ評価(2)

- 3つの測定点から、よりよい推定値を計算する
 - 分散共分散を考慮した重みつき平均を行う必要がある。
 - 重み付き平均のためのヤコビ行列 A_{mq} は、式のようになり、このヤコビ行列と測定値の分散共分散行列 S_{mq} から平均を求める係数 C が計算できる。
 - その推定値の分散共分散行列 S_c も同様に計算できる。
 - 校正後の測定点の分散共分散 S_c は、校正後の座標測定機が測定した測定点のX座標およびY座標の分散と共分散を示し、測定点の不確かさを示している。

$$A_{mq} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$C = (A_{mq}^T S_{mq}^{-1} A_{mq})^{-1} A_{mq}^T S_{mq}^{-1}$$

$$S_c = \begin{pmatrix} s_{xc}^2 & s_{xyc} \\ s_{xyc} & s_{yc}^2 \end{pmatrix} = (A_{mq}^T S_{mq}^{-1} A_{mq})^{-1} = C S_{mq} C^T$$

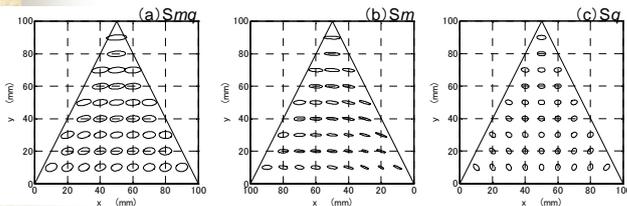
2006/1/17

三次元座標測定9回

23

計算例の校正後の不確かさ評価(3)

- 722点で校正した後の測定点の誤差を測定範囲内の10mm間隔の位置で評価した例
 - (a)は S_{mq} より計算された分散共分散より誤差楕円を求め、2000倍に拡大して表示したものである。三角形の各頂点にレーザトラックが配置されて、レーザトラックに対する測定位置により誤差の様子
 - (b)と(c)はそれぞれ、 S_{mq} の代わりに S_m と S_q を使った場合の誤差の評価で、パラメータの誤差による測定誤差、レーザトラックの測長誤差による測定誤差の誤差楕円を示している。この2つの和が(a)



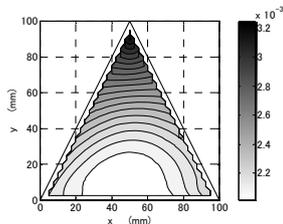
2006/1/17

三次元座標測定9回

24

計算例の校正後の不確かさ評価(4)

- 各点のX座標の誤差とY座標の誤差の二乗和の平方根を等高線表示したものである。
 - 色が黒いほど、誤差が大きいことを示している。誤差の計算は、三角形より2.5 mm 内側の領域に対して行った。
 - これらの誤差は、測定点を座標測定機の座標系で評価したものである
 - 校正に使った座標系の取り方によって、値が異なる。レーザトラック1を(0, 0)に固定しているので、この付近の誤差が小さくなり、レーザトラック3の付近で誤差が大きくなる。
 - 本当に測定結果を評価するためには、測定によって測定物座標系をつくり、その中での相対的な位置の誤差を評価すべきである。



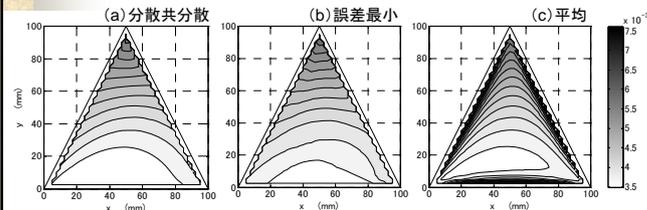
2006/1/17

三次元座標測定9回

25

測定値の平均

- 3つの測定値の平均の取り方は種々考えられる。
- 図は、校正点が181点の場合
 - (a)は分散共分散を考慮して平均を取った場合
 - (b)は3つの測定点のうち誤差が小さいものを選んだ場合
 - (c)は単純に3つの座標を平均した場合である。
 - (a)の方法が最も測定誤差を小さくできることが分かる。また、単に平均を取った場合では、測定範囲の外側の端で誤差が大きくなる



2006/1/17

三次元座標測定9回

26

まとめ

- 三次元機構を座標測定機として用いる場合、複数の順運動学を持つ冗長な座標測定機の自己校正における理論的な定式化を行った。さらに、校正後の測定点に対する不確かさの評価手法を導出した。その結果以下のことが分かった。
 - 座標測定機の順運動学を冗長さ座標測定機に拡張し、最小二乗法によって校正する方法を定式化した。
 - 校正後の測定点の不確かさを計算する方法として、複数の測定結果を平均する方法を定式化した。
 - この計算手法により、冗長さ座標測定機の自己校正における運動学パラメータの校正の理論的な手法を確立できた。
- 今後は、
 - 校正後の測定点の評価方法として、測定物座標系における評価方法の検討
 - 運動学パラメータ以外の幾何パラメータの校正を行い
 - アーティファクト校正を確立することを目指す。

2006/1/17

三次元座標測定9回

27