

座標計測における形体パラメータの信頼性*

高増 潔**

古谷涼秋***

大園成夫**

Reliability of Parameters for Associated Features in Coordinate Metrology

Kiyoshi TAKAMASU, Ryoshu FURUTANI and Shigeo OZONO

In coordinate metrology, an associated feature (Gaussian associated feature) is normally calculated from a measured data set of CMM (Coordinate Measuring Machine) on a real feature using least squares method. Then, the associated feature is expressed without the geometrical deviation and the measuring uncertainty. However, the geometrical deviation and the uncertainty of the associated feature are key values to evaluate the function of machine parts. Therefore, the novel data processing method for evaluating the reliability of parameters for associated features has been developed. In this method, the reliability of each parameter of the associated feature can be processed from the standard deviation and the position of each measuring point using Jacobian matrix. Then, the uncertainties of parameters and deviations of the associated features can be calculated. This directly implies that these values and these calculations can be used for the evaluations of measurement uncertainties and a computational tolerancing.

Key words: coordinate metrology, coordinate measuring machine, Gaussian associated feature, least squares method

1. はじめに

精密計測における形状計測の中で,三次元座標測定機を用いる座標計測の重要性が増加している。ISOにおいても,座標計測の規格化,位置付けが行われている。この中では,三次元座標測定機によって測定された形体(real feature)上の複数の測定点から,最小二乗法により実際形体(associated feature)が計算される¹⁾²⁾。このとき,実際形体としては最小二乗法によって計算された幾何学的に理想的な形状(Gaussian associated feature)を持つ形体が使われる。

しかし,このままでは測定した形体の寸法などの不確かさの評価を行うことができない。形体の不確かさの評価として,単独形体に対しては測定された実際形体からの残差の標準偏差を用いること,関連形体に対しては単独形体の標準偏差を利用した形体間演算を用いることを提案した³⁾。単独形体の測定の不確かさを残差の標準偏差だけを用いて評価することは,簡単でよい推定値を与えるが,測定点の位置が偏っているような場合には正しい値を与えることができない。

本論文では,単独形体(直線形体,円形体および円筒形体)を複数の測定点で測定した場合の測定結果(計算された形体のパラメータ)の信頼性を評価する手法を定式化する。まず,測定点の位置,数などから最小二乗法により形体のパラメータを計算する場合の,測定点の誤差とパラメータの誤差の関係を示し,次に,測定位置における計算結果の信頼性の幅の計算方法を示す。

この手法によって,単独形体の測定の不確かさをより正確に求められるばかりでなく,要求された測定の不確かさに合わせた測定位置,測定点の数を決定することができ,座標計測において,データム⁴⁾や幾何精度を用いた形状評価⁵⁾⁶⁾に,測定の不確かさを統一的に使用することが可能となると考えられる。

2. 実際形体の計算手法

2.1 計算の前提条件

座標計測においては,実際形体として最小二乗法によって計

算された理想的な幾何形状を持つ形体を利用する。この場合,粗さ測定などの形状計測と違い,以下の前提条件を考慮して計算手法の定式化を行う必要がある。

- (1) 測定点の数は少ない。
- (2) 測定点を形体全体に均等に取れるとは限らない。
- (3) 測定精度は必ずしもよくない。
- (4) 測定対象の形体のモデルは分かっている。

(1)~(3)の条件は形状計測と大きく異なることで,三次元座標測定機の精度,構造の制約を考えると必要となる条件である。このような条件では,形体のパラメータを計算する場合に,測定点の誤差を無視することはできない。測定点の誤差と形体のパラメータの誤差の関係は,基本的には誤差伝播の法則を最小二乗法に適用することで評価することができる。

(4)の条件の意味は,測定点を球面上の点として見るか,円筒上の点として見るかということが分かっていることである。精度のよい測定点が大量に得られる場合,形体のモデルを測定点から推定することは可能となる。しかし,上記のような条件の下では,形体のモデルを推定することは難しい。

次に,最小二乗法を行う前提として,以下のこと仮定する。

- (1) すべての測定点の誤差(標準偏差)は既知の量 σ_0 である。
- (2) 測定点間の相関はない。

測定点の誤差は,座標測定機による一点測定の不確かさ,形体の表面粗さなどの高周波成分による測定の不確かさなどから計算されるものである。測定点間の相関の影響については,3.2項で一部検討を行う。

σ_0 を測定点の一点測定の不確かさとする, σ_0 から最小二乗法による計算結果の不確かさを推定するのがこの論文の目的となるが,用語としては不確かさの代わりに誤差という言葉を用い,値としては標準偏差または分散を用いて表現する。

2.2 最小二乗法による計算

まず,最小二乗法の計算手法を簡単⁷⁾⁸⁾に記述する。式(1)の関係が,観測方程式,正規方程式,最小二乗解の間にはある。

$$\left. \begin{aligned} \text{観測方程式: } & \mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{p} \\ \text{正規方程式: } & \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d} \\ \text{最小二乗解: } & \mathbf{p} = (\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* 原稿受付 平成9年4月16日

** 正会員 東京大学工学系研究科(東京都文京区本郷7-3-1)

*** 正会員 東京電機大学工学部(東京都千代田区神田錦町2-2)

ただし, \mathbf{A} はヤコビ行列, \mathbf{d} は測定値ベクトル, \mathbf{p} はパラメータベクトル, \mathbf{S} は測定値の誤差行列 (分散・共分散行列) であり, $\tilde{\mathbf{A}}$ は \mathbf{A} の転置行列を表す. パラメータの誤差行列 \mathbf{S}_p および計算値の誤差行列 \mathbf{S}_m は式 (2) および (3) によって求められる. \mathbf{S}_p の対角成分は, 計算された各パラメータの持つ誤差の分散を, \mathbf{S}_m は最小二乗形体上の任意の位置における最小二乗形体の信頼性の幅の分散を示す. 式 (2) は, 測定値の誤差からパラメータの誤差への誤差の伝播で, 式 (3) はパラメータの誤差から計算値の誤差への誤差の伝播の式である.

$$\mathbf{S}_p = (\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A})^{-1} \quad (2)$$

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{A}\mathbf{S}_p\tilde{\mathbf{A}} \quad (3)$$

この評価によれば, 測定点の誤差が分かっている場合, 最小二乗形体の任意位置における誤差の範囲 (信頼性の幅) がヤコビ行列から計算できる. ヤコビ行列は測定点の位置にのみ依存するため, パラメータの誤差も測定点の位置と測定点の誤差によって評価できる. 最小二乗法を使う理由の一つは, このように計算結果の信頼性を評価できることにある⁹⁾¹⁰⁾.

3. 直線のパラメータの評価

3.1 直線のパラメータ誤差の計算

2.2 項の計算の簡単な例として二次元の直線を扱う. 最小二乗直線を計算し, 測定点の重心を原点に方向ベクトルを X 軸となるように測定点を回転, 平行移動したとして解析を行う. このように測定点を変換しても, 解析の一般性は損なわれない.

パラメータを直線の Y 切片と傾き (p_1 および p_2) とする. 観測方程式は $d = p_1 + p_2x$ となる. まず, n 個の測定点 $t_1(x_1, y_1) \sim t_n(x_n, y_n)$ よりヤコビ行列 \mathbf{A} を作る.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

つぎに, パラメータの誤差行列 \mathbf{S}_p を求める. 測定点の位置を $-0.5D \sim 0.5D$ の範囲に原点に左右対称に取り, 測定点に相関がなく, 測定誤差の分散を σ_0^2 と仮定する. この条件では, \mathbf{S} は単位行列と σ_0^2 の積となり, x の和の項はゼロとなるので, 正規方程式の最初の部分は, 式 (5) で表現され, \mathbf{S}_p は式 (6) となる.

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{S}_p = \begin{pmatrix} \sigma_{p_1}^2 & \\ & \sigma_{p_2}^2 \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum x_i^2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

この計算より, 直線の Y 切片の誤差 σ_{p_1} は, n の逆数で決まり, 傾きの誤差 σ_{p_2} は x^2 の和の逆数で決まることとなる. つまり, n が大きいほど直線の Y 切片の誤差は小さくなり, x の二乗和が大きいほど直線の傾きの誤差は小さくなる. n は測定点数なので, 同じ測定点数では, x の絶対値が大きい, つまり外側に測定点を取るほど直線の傾きの誤差は小さくなる.

例えば測定点が 10 点の場合, 10 点を等間隔に取った場合と 5 点ずつを左右の端に取った場合では, 直線の Y 切片の誤差はどちらも σ_0/\sqrt{n} となるが, 直線の傾きの誤差は, 前者で $0.99\sigma_0/D$ となり, 後方で $0.63\sigma_0/D$ となり, 前者の誤差は後者

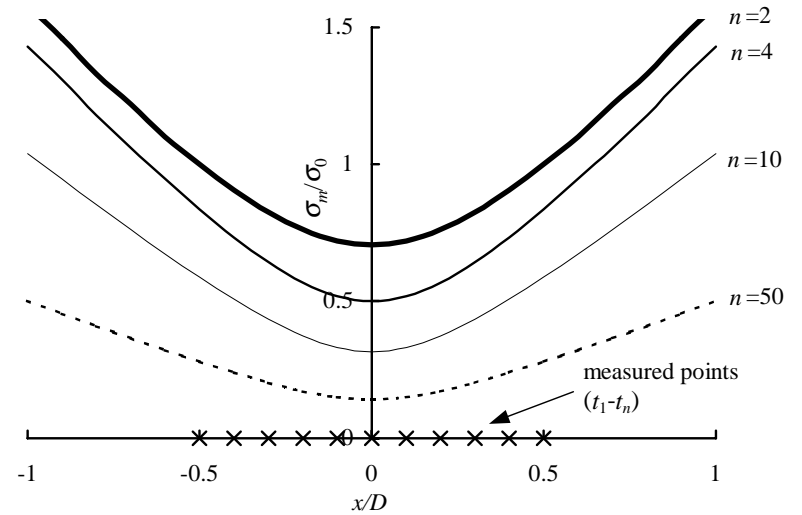


Fig. 1 Reliability range σ_m/σ_0 versus position of least squares line x/D at number of measured points $n = 2, 4, 10$ and 50

より 57% ほど大きくなっている.

最小二乗直線上の任意位置における信頼性の幅を示す誤差行列 \mathbf{S}_m は, ヤコビ行列 \mathbf{A} を (1 x) と置いて式 (3) を計算することで得られる. 式 (6) と同様の測定点の条件では,

$$\mathbf{S}_m = \sigma_m^2 = \sigma_0^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{x^2}{\sum x_i^2} \right) \quad (7)$$

となる. 式 (7) より, n 個の測定点が D の範囲に均等に置かれたとき, 最小二乗法で計算された直線の信頼性の幅は,

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{12(n-1)}{n(n+1)} \frac{x^2}{D^2}} \sigma_0 \quad (8)$$

となり, 原点で σ_0/\sqrt{n} の誤差, 原点から離れるにつれて, 式 (9) に漸近することを示している.

$$\sigma_m = \pm \sqrt{\frac{12(n-1)}{n(n+1)} \frac{\sigma_0}{D}} x \quad (9)$$

図 1 は, 最小二乗直線上の任意位置による信頼性の幅を, 横軸は D , 縦軸は σ_0 で正規化して示している. n が小さい場合は, 外側では信頼性の幅が広がっていることが分かる. また, 式 (8) を利用して信頼性の幅を指定した値以下にするために必要な測定点および測定点の範囲を決定できる.

3.2 測定点の相関がある場合

前項の結果は測定点の相関がない場合であるが, 測定点に近い場合には測定点間に相関がないとするのは現実的でない. そこで, 測定点間に測定点の距離の関数として相関を与えた場合について簡単な検討を行う.

測定点間の相関を考えた場合も, 2.2 項の計算はそのまま成立する. ただし, \mathbf{S} は対角行列にはならず, 非対角要素には相関係数 (共分散係数) が入ることになる. まず, 4 つの測定点を左右対称に $-0.5D, -kD, kD$ および $0.5D$ に配置した場合について考える. 相関がなければ, 前項のように 2 点ずつを左右の端に置いた場合に直線の傾きのパラメータ誤差 σ_{p_2} が最小の σ_0/D となる. 図 2 の印は, 相関がない場合に k をパラメータとして直線の傾きのパラメータ誤差 σ_{p_2} を示している. k が 0.5 の場合誤差は最小の σ_0/D となり, k が 0.0 のとき最大の $\sqrt{2}\sigma_0/D$ となる.

測定点に相関がある場合には, 式 (2) および (3) の計算で \mathbf{S} に適当な共分散係数を入れる必要がある. 相関関数 $r(u)$ を距離 u によって決まる関数とする. 一般的には, 相関関数は $r(0)$

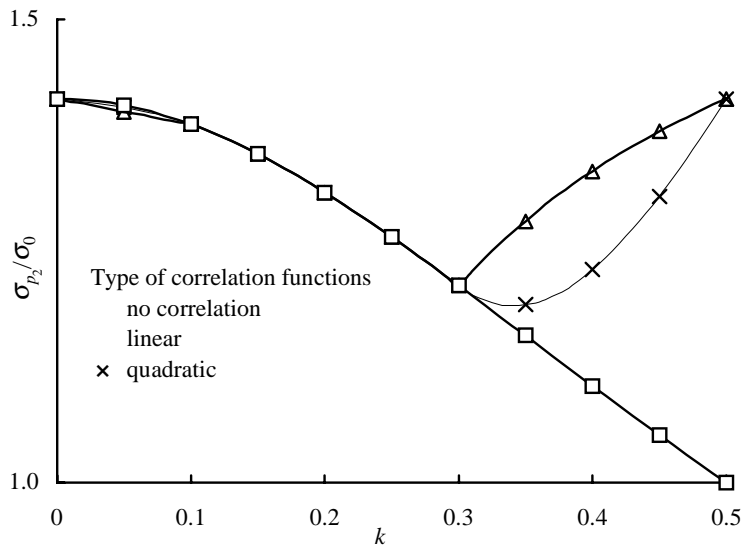


Fig. 2 Error of direction of least squares line σ_{p_2} versus position of measured points k at 3 types of correlation functions

の値が 1.0 で、2 つの測定点の距離 u が増加すると減少するような関数である。上記の例では、 S は式 (10) のように表現できる (距離は D で正規化されている)。

$$S = \begin{pmatrix} 1 & r(0.5-k) & r(0.5+k) & r(1) \\ r(0.5-k) & 1 & r(2k) & r(0.5+k) \\ r(0.5+k) & r(2k) & 1 & r(0.5-k) \\ r(1) & r(0.5+k) & r(0.5-k) & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

図 2 の 印および \times 印は、それぞれ一次関数の相関関数と二次関数の相関関数を仮定した場合のパラメータ誤差を示す。どちらの相関関数も測定点間の距離が 0 のときは 1.0、距離が 0.2D で相関が 0.0 となるように設定した。

一次的な相関を仮定すると、相関がなくなったところに測定点を取ると、直線の傾きのパラメータ誤差を減らすことができる。つまり、 $k=0.3$ のときが一番信頼性の高い測定が可能となる。二次関数の相関関数に対しては、相関のなくなる少し前 ($k=0.34$) がもっとも直線の傾きの信頼性が高い測定ができることが分かる。

4. 円および円筒のパラメータの評価

4.1 二次元の円のパラメータ誤差の計算

二次元の形体のもう一つの例として、円の測定の場合を検討する。円のパラメータを中心座標 (p_1, p_2) と半径 (p_3) とするとヤコビ行列は式 (11) となる¹¹⁾。

$$A = \begin{pmatrix} -x_1/r_1 & -y_1/r_1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -x_n/r_n & -y_n/r_n & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

最小二乗中心が原点となるようにすべての測定点を平行移動する。そして、測定点を極座標で表現するとヤコビ行列 A は式 (12) のように表現できる。

$$A = \begin{pmatrix} -\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\cos\theta_n & -\sin\theta_n & -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここで、 $x_i = r_i \cos\theta_i$ 、 $y_i = r_i \sin\theta_i$ である。測定点に相関がないとき、パラメータの誤差行列は、

$$S_p = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} C & \Sigma \cos\theta_i \sin\theta_i & c \\ \Sigma \cos\theta_i \sin\theta_i & S & s \\ c & s & n \end{pmatrix}^{-1} \quad (13)$$

以下、 $C = \Sigma \cos^2\theta_i$ 、 $c = \Sigma \cos\theta_i$ 、 $S = \Sigma \sin^2\theta_i$ 、 $s = \Sigma \sin\theta_i$ と表現する。もし、測定点を円上に均等にとると、コサイン、サインおよびコサイン \times サインの和の項はゼロとなる。更に、コサインとサインの二乗の和は $n/2$ となるので、パラメータの誤差行列は式 (14) の形となる。

$$S_p = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{2} & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}^{-1} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad (14)$$

これは、円の中心の X および Y 座標の誤差が $\sqrt{2/n}\sigma_0$ 、半径の分散が $\sqrt{1/n}\sigma_0$ となることを表している。

つぎに、測定点が偏っている場合を考える。 n 個の測定点 $t_1 \sim t_n$ が X 軸の正の部分の $\pm\alpha/2$ に X 軸に上下対称に存在しているとする。測定点の位置は上下対称のため、サインおよびコサイン \times サインの和の項はゼロとなる。パラメータの誤差行列は、

$$S_p = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \frac{n}{B} & 0 & \frac{-c}{B} \\ 0 & \frac{1}{S} & 0 \\ \frac{-c}{B} & 0 & \frac{C}{B} \end{pmatrix} \quad (15)$$

となる。ここで、 $B = n\Sigma \cos^2\theta_i - (\Sigma \cos\theta_i)^2 = nC - c^2$ である。この式から、中心の X 座標の誤差 σ_{p_1} は、 B が大きいほど (コサインの項がばらついていないほど) 小さいことが分かる。すなわちコサインが大きい測定点 ($\theta_i = 0$) とコサインが小さい測定点 ($\theta_i = \pm\alpha/2$) が多く存在すればよい。中心の Y 座標の誤差 σ_{p_2} および半径の誤差 σ_{p_3} の共分散係数は負の値を持つため、この 2 つのパラメータが負の相関を持つことが分かる。また、中心の Y 座標の誤差 σ_{p_2} は、サインの二乗和が大きいときに小さくなる。

最小二乗円上の任意位置における信頼性の幅はヤコビ行列 A を $(-\cos\theta \ -\sin\theta \ -1)$ とし S_m の計算をすることで式 (16) として求められる。

$$S_m = \sigma_m^2 = \sigma_0^2 \left(\frac{C}{B} + \frac{1}{S} - \frac{2c}{B} \cos\theta + \left(\frac{n}{B} - \frac{1}{S} \right) \cos^2\theta \right) \quad (16)$$

例として、測定点を $\pm 30^\circ$ の範囲に均等に 5 つ取った場合について計算した結果を示す。信頼性の幅は、 $\sigma_m = (10.8 - 23.0 \cos\theta + 12.7 \cos^2\theta)^{1/2}$ となる。図 3 は半径を 10.0、 σ_0 を 1.0 としたときの例で、太実線で示す円が最小二乗円、 \times 印が測定点の位置、網掛け部分が信頼性の幅を表現している。

図 4 は、中心の X 座標の誤差 σ_{p_1} を測定点の範囲 α と測定点の数 n との関係で示したものであり、縦軸は σ_0 との比を対数表現している。この図より、必要な測定の信頼性を確保するためには、どのように測定点の位置を取るかを評価することができる。図 5 は、図 4 を等高線表示したもので、太実線は $\sigma_{p_1} = \sigma_0$ および $\sigma_{p_1} = 2\sigma_0$ となる条件を示している。右の太実

線より右側の条件（例えば，測定点の数 n が 40 で測定点の範囲 α が 150° の場合：図の \times 印の条件）で測定すれば，計算された最小二乗円の中心の X 座標の誤差 σ_{p_1} が測定点の誤差 σ_0 より小さくなる事が分かる．

4.2 円筒のパラメータ誤差の計算

円筒の場合も円と同様に，以下の条件で最小二乗法が構成できる．まず，最小二乗円筒の軸の方向ベクトルが Z 軸，軸上の一点が原点となるように測定点を平行移動および回転する．軸上の一点の X および Y 座標 (p_1, p_2)，軸の単位方向ベクトルの X および Y 座標 (p_3, p_4)，および円筒の半径 (p_5) をパラメータとする．測定点を円筒座標で表現するとヤコビ行列 A は式 (17) のように表現できる．

$$A = \begin{pmatrix} -\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & -z_1 \cos\theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\cos\theta_n & -\sin\theta_n & -z_n \cos\theta_n \\ & & -z_1 \sin\theta_1 & -1 \\ & & \vdots & \vdots \\ & & -z_n \sin\theta_n & -1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

もし，測定点を円筒上に円周方向に均等に n_1 個，母線方向の $\pm D/2$ の範囲に均等に n_2 個取ると（合計測定点数 $n = n_1 \times n_2$ ）．Z 座標，コサイン，サインおよびコサイン \times サインなどの和の項はゼロとなる．更に，コサインとサインの二乗の和は $n_1/2$ となるので，パラメータの誤差行列は式 (18) となる．

$$S_p = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & & & & 0 \\ & \frac{2}{n} & & & \\ & & \frac{24(n_2-1)}{n(n_2+1)D^2} & & \\ & & & \frac{24(n_2-1)}{n(n_2+1)D^2} & \\ 0 & & & & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad (18)$$

S_p の対角成分は，最小二乗円筒の軸上の一点の X および Y 座標の誤差，軸の方向ベクトルの X および Y 座標の誤差，半径の誤差をそれぞれ示している．

つぎに，測定点が偏っている場合を考える． $n_1 \times n_2$ 個の測定点が図 6 のように円周方向の範囲 $\pm \alpha/2$ Z 方向の範囲 $\pm D/2$ に等間隔に存在しているとする．測定点の位置は上下対称のため，サインおよびコサイン \times サインの和の項はゼロとなり， S_p は式 (19) で計算できる．

$$S_p = \begin{pmatrix} n_2 C & & & n_2 c \\ & n_2 S & & \\ & & \Sigma z_j^2 C & \\ & & & \Sigma z_j^2 S \\ n_2 c & & & n \end{pmatrix}^{-1} \quad (19)$$

ここで，添え字は $i = 1 \sim n_1$ (i は C, S, c および s で使われている)， $j = 1 \sim n_2$ である．

図 7 は $\alpha = 90^\circ$ ， $D = 5$ ， $n_1 = 6$ ， $n_2 = 4$ の条件で測定点の誤差を評価したものであり，XZ 平面を切り口として表示してある．真ん中の円筒が最小二乗法で計算された円筒を，外側と内側の円筒がその点における計算値の信頼性の幅 $\pm \sigma_m$ を示している．測定点は X 軸の正の領域にあるので，そこから離れている X

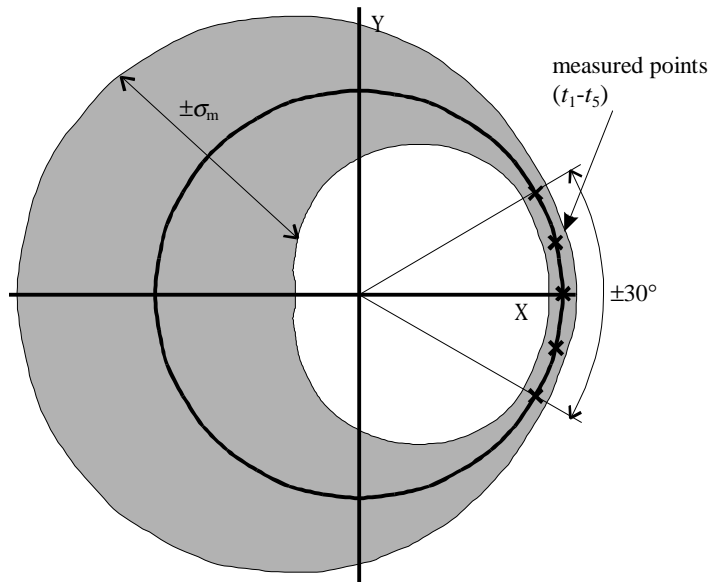


Fig. 3 Reliability range of least squares circle at 5 measured points (t_1-t_5) in range of angle $\pm 30^\circ$

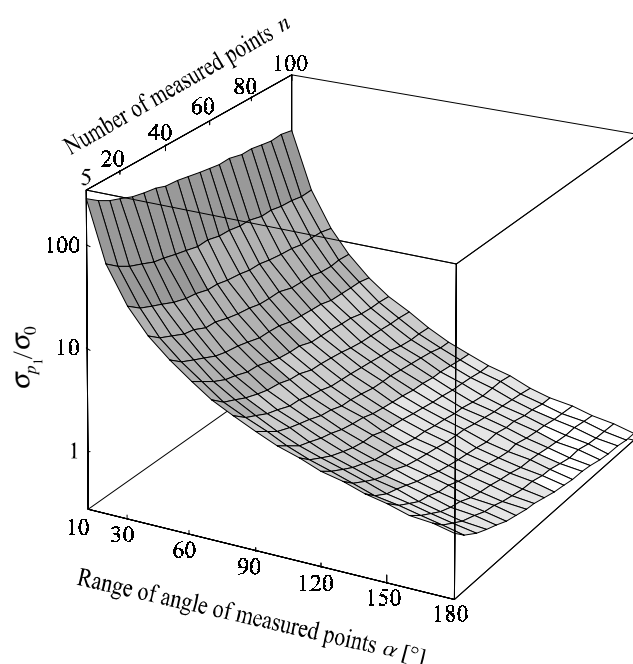


Fig. 4 3D map of σ_{p_1} versus number and range of angle of measured points ($n: 5 - 100$ and $\alpha: 10^\circ - 180^\circ$)

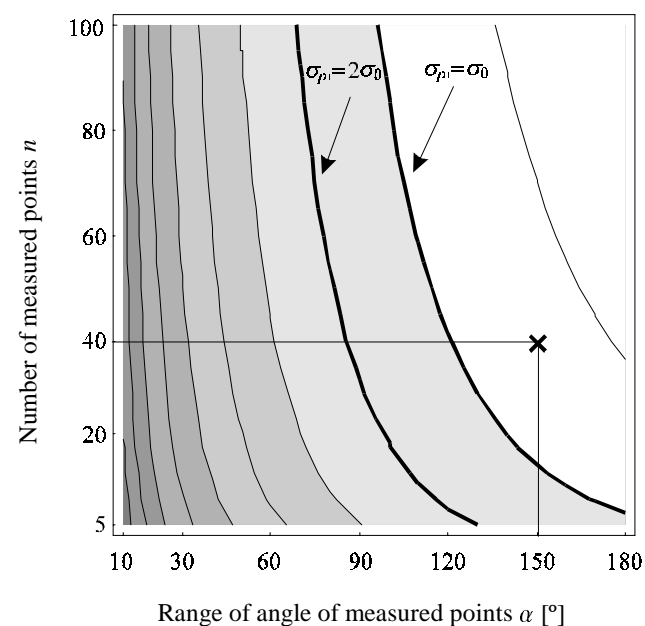


Fig. 5 Contour map of σ_{p_1} versus number and range of angle of measured points (n and α)

軸の負の領域で誤差が大きくなっていること，Z 軸の上下方向に原点より離れると誤差が大きくなる様子が分かる．

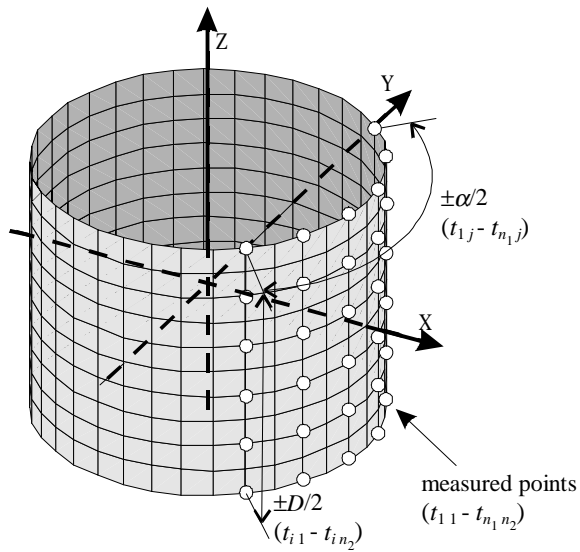


Fig. 6 Positions of measured points (t_{ij}) on least squares cylinder

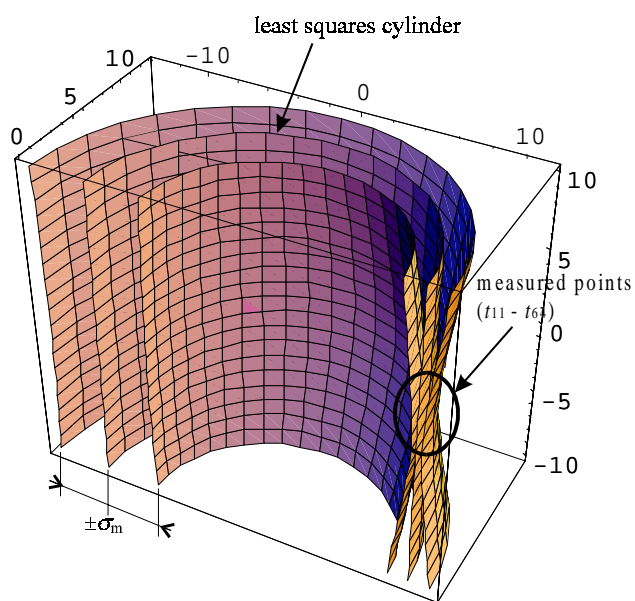


Fig. 7 3D map of reliability range of least squares cylinder

5. おわりに

最小二乗法で、実際形体を計算する場合の、パラメータ誤差および最小二乗形体の信頼性の幅の計算方法を示し、それを直線形体、円形体および円筒形体に適用した場合の計算方法を定式化した。この計算方法によれば、形体の観測方程式からヤコビ行列を作り、測定点の位置および数から、機械的にパラメータ

誤差、最小二乗形体上の任意の位置における計算値の信頼性の幅を計算できる。

また、この手法を用いたデータ解析の例として、以下の解析方法を示した。

- (1) 測定点の数、測定点の範囲とパラメータ誤差の関係の導出方法
- (2) 測定値に相関がある場合の、測定点とパラメータ誤差との関係の導出方法
- (3) 必要なパラメータ誤差を満足するような、測定位置、測定点の数を求める方法

この手法と形状精度を含めた形状間演算の手法を組み合わせることによって、各形体の誤差評価をより精密に行うことができる。また、生産工程の工程能力から製品の粗さなどが予測でき、測定機の精度などから一点測定の誤差が予測できるとき、本手法を利用して製品要求精度にあった測定戦略を決定することも可能であると考えている。

今後は、一点測定の誤差（測定の不確かさ）として既知の量として扱った σ_0 の推定方法および、やはり既知として扱った形体モデルの決定方法について検討する予定である。

参考文献

- 1) ISO/CD 14660-1 Geometrical Product Specifications(GPS) – Geometric features – Part 1: General definitions.
- 2) ISO TR10360-1: Coordinate metrology – Part 1: Definitions and applications of the fundamental geometric principles.
- 3) 高増 潔ほか：座標計測における幾何偏差を含んだ形体間演算，精密工学会誌，**62**，7（1996）964。
- 4) 古谷涼秋ほか：三次元形状の評価法，精密工学会誌，**54**，5（1988）890。
- 5) 高増 潔，大園成夫：最小二乗法によるデータム平面の決定方法，精密工学会誌，**51**，3（1985）563。
- 6) 洪 俊憲ほか：測定データから抽出した幾何パラメータによる加工工程の管理手法，精密工学会誌，**61**，12（1995）1710。
- 7) 後藤充夫：データ解析の原理とテクニック，コロナ社，（1987）。
- 8) 中川 徹，小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，（1982）。
- 9) A. Forbes: Robust Circle and Sphere Fitting by Least Squares, NPL Report DITC 153/89, (1989).
- 10) W. Lotze: Precision Length Measurement by Computer-aided Coordinate Measurement, J. Phys. E: Scientific Instruments, **19**, (1986) 495.
- 11) J. MacCool: Systematic and Random Errors in Least Squares Estimation for Circular Contours, Prec. Eng., **1**, (1979) 215.