

# 形体計測における不確かさの見積り（第3報）\*

— 区分多項式による直線形体の形状偏差モデル —

高増 潔\*\* 阿部 誠† 古谷涼秋‡ 大園成夫‡

Estimation of Uncertainty in Feature Based Metrology (3rd Report)  
 – Form Deviation Model of Line Feature by Piecewise Polynomial –

Kiyoshi TAKAMASU, Makoto ABE, Ryoshu FURUTANI and Shigeo OZONO

In coordinate metrology, it is the key technology to estimate the uncertainty of the measurement in a specific measuring strategy. In this paper, the influence of the systematic error in feature based metrology is theoretically analyzed to a line feature. When a line feature with a form deviation is measured with a coordinate measuring machine, the model which consists of a smooth curve of low frequency and a random error can describe the form deviation of the line feature. The technique of making the form deviation model of this line feature using a piecewise polynomial is proposed, and the method of calculating the parameters by least squares method is formulized. Furthermore, the evaluation indicator in the case of choosing a model and parameterization is shown. The reliability of the measured line feature is evaluated by applying error propagation to this method. Some simulations are statistically performed for this method and the concept of this paper and the usefulness of the fundamental data processing technique are confirmed.

**Key words:** uncertainty of measurement, form deviation, piecewise polynomial, line feature, coordinate metrology

## 1. 緒 言

座標測定機を用いて、形体のパラメータを測定する形体計測においては、それぞれの測定結果に対する不確かさの見積りが重要な役割を持っている<sup>1)</sup>。不確かさの見積りにおいて、未知の系統誤差の影響はまだ理論的な解析が進んでいない。未知の系統誤差としては、測定戦略による誤差、スケールの低次の誤差、温度ドリフト、プローブの方向性の誤差、測定物の形状偏差などが考えられる<sup>2)~4)</sup>。前報では、測定物の形状偏差の影響を円形体の測定を対象として検討した<sup>5)</sup>。円形体の場合、回転ツールで加工されることなどから、形状偏差を円周全体に渡って均等の性質を持つことが仮定でき、フーリエ解析および自己相関により、測定の不確かさの解析が有効に行えた。

一方、直線形体の場合は加工条件などにより、形状偏差の性質が場所により異なること、連続的なデータでないためフーリエ解析においては窓関数が必要で、窓関数の種類により解析結果が大きく影響されることなどが指摘されている<sup>6)</sup>。そこで、直線形体に対応した不確かさ推定手法の定式化が必要とされる。

図1はアルミ板の表面を座標測定機により1mm間隔で512点測定したデータである。大きな形状の変化に細かい粗さが乗っている。このような直線形体の形状偏差をモデル化する場合には、平滑な低次の曲線上の偏差にランダムな偏差が重なっているようなモデルが必要である。このようなモデルを使えば、同一条件で加工されている直線形体を、多くの測定点で細かく測定した測定データから形状偏差の低次の曲

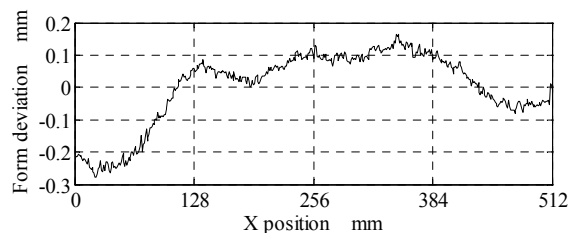


Fig. 1 Example of form deviation of line feature: no. of data is 512 in 512 mm

線部分をモデル化し、残りを正規分布に従うランダムな偏差と仮定することができ、少ない点で測定したデータから得られた直線形体モデルの不確かさを推定することができる。

本報では、前報の手法を直線形体に適用し、測定物の持つ形状偏差のモデル化とその信頼性評価を理論的に定式化する。

## 2. 区分多項式による直線形体のモデル化

### 2.1 区分多項式の表現方法

まず、低次の曲線のモデルとしては、普通の多項式を採用する。計算の数値条件や求めるパラメータの独立性などが重要な場合には、Legendre の多項式やスプライン関数などを利用することが好ましい場合がある<sup>7)8)</sup>。しかし、形状偏差を低次の曲線で表すためには、パラメータの性質は重要でないので、単純な多項式で充分であると考えられる。多項式で図1のような測定値を近似する場合、全体をひとつの区分として近似すると、かなり高次の多項式が必要となる。また、前述したように、直線形体では加工条件により均一性は期待できないし、後述するように、多項式の次数は近似結果の信頼性と関係するので、測定値をいくつかの区分に分けることを考える。区分が1つの場合も以下の定式化の中に含まれる。

区分な多項式を表現するには、以下の3つの要素を決定する必要がある。

\* 原稿受付 平成 17 年 3 月 31 日  
 \*\* 正 会 員 東京大学大学院工学系研究科（東京都文京区本郷 7-3-1）  
 † 正 会 員 （株）ミットヨつくば研究所（つくば市上横場 430-1）  
 ‡ 正 会 員 東京電機大学工学部（東京都千代田区神田錦町 2-2）

- (1) 区間の分割数  $n_p$
- (2) 使用する多項式の次数  $d_m$
- (3) 区間で連続する次数  $d_c$  (0 階から  $d_c$  階まで連続)

このような条件を満たす多項式の構成方法はいくつかあるが、ここでは切断べき関数を利用する方法を使う<sup>9)</sup>。まず、最初の区分は  $d_m$  次の多項式で表し、次の区分からはその区分以降に対して  $d_c + 1$  次から  $d_m$  次の多項式を加えていく。この方法では、自動的に上記の条件を満足する区分多項式を記述できる。

多項式の各係数がパラメータとなる。最初の区分の多項式の 0 次から  $d_m$  次の係数を  $a_{1,0}$  から  $a_{1,d_m}$ , 2 番目から  $n_p$  番目までの区分  $i$  の係数を  $a_{i,d_c+1}$  から  $a_{i,d_m}$  として記述する。多項式の次数を  $j$  で表し、区分の開始する位置を  $p_i$  とすると、区分多項式  $y$  を式 (1) のように記述できる。

$$y = \sum_{j=0}^{d_m} a_{1,j} x^j + \sum_{i=2}^{n_p} \sum_{j=d_c+1}^{d_m} a_{i,j} (x - p_i)_+^j \quad (1)$$

ここで、 $(x - p_i)_+$  は正側の切断関数を表し、以下のように括弧内が負の場合は 0, 正の場合はそのものを表すように定義する。

$$(x - p_i)_+^j = \begin{cases} 0 & x < p_i \\ (x - p_i)^j & x \geq p_i \end{cases} \quad (2)$$

式 (1) におけるパラメータ  $(a_{i,j})$  の個数  $n_a$  は、式 (3) となる。

$$n_a = (n_p - 1)(d_m - d_c) + d_m + 1 \quad (3)$$

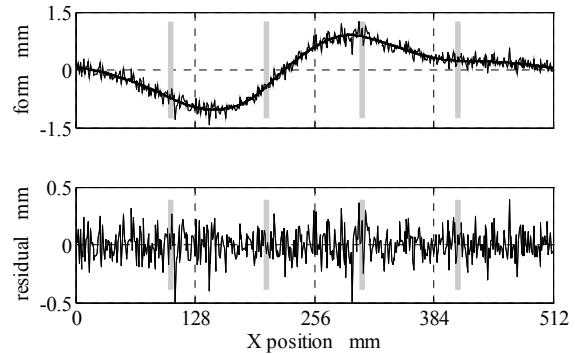
例えば、3 つの区分に区分位置を  $p_2, p_3$  で分け、次数が 3 次, 0 階から 2 階まで連続とすると、 $n_p = 3, d_m = 3, d_c = 2$  となり、パラメータは、 $a_{1,0}$  から  $a_{3,3}$  の 6 個となり式 (4) で区分多項式を記述できる。

$$y = \begin{cases} a_{1,0} + a_{1,1}x + a_{1,2}x^2 + a_{1,3}x^3 & p_2 \geq x \\ a_{1,0} + a_{1,1}x + a_{1,2}x^2 + a_{1,3}x^3 + a_{2,3}(x - p_2)^3 & p_3 \geq x \geq p_2 \\ a_{1,0} + a_{1,1}x + a_{1,2}x^2 + a_{1,3}x^3 + a_{2,3}(x - p_2)^3 + a_{3,3}(x - p_3)^3 & x \geq p_3 \end{cases} \quad (4)$$

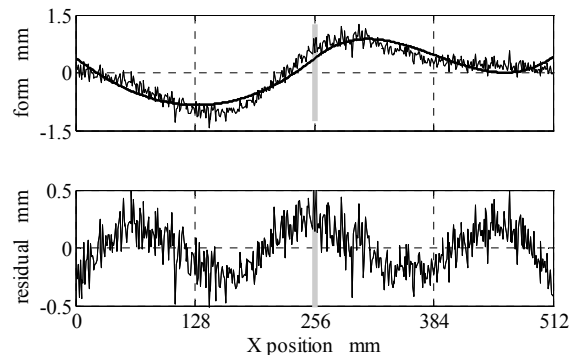
### 2.2 区分多項式のパラメータの最小二乗法による計算

上記のような表現をした区分多項式のパラメータを、測定点から求める方法を記述する。区分多項式は、 $x$  について考えれば多次数の式であるが、パラメータ  $(a_{i,j})$  について見れば線形の式である。従って、パラメータを求める問題は線形回帰分析となり、パラメータの個数以上の独立した測定値があれば、最小二乗法によりパラメータの推定値を求めることができる。最小二乗の条件としては、 $y$  の値において、残差を最小にすることとなるので、 $y$  の式が観測方程式となる。以下の式では測定値の不確かさは全て等しく、重みが同じになることを仮定しているが、もし不確かさが等しくない場合は、対応した重みを加える必要がある。

$y$  が観測方程式になるので、これをパラメータで偏微分するとヤコビ行列  $\mathbf{A}$  が計算できる。 $n_m$  個の測定点の横座標を  $x_m$  ( $m = 1 \sim n_m$ ) とすると、式 (1) に対応したヤコビ行列  $\mathbf{A}$  の要素は、 $m$  行が  $m$  番目の測定点  $x_m$ ,  $n$  列が  $n$  番目のパラ



(a) no. of piecewise  $n_p = 5$ , max degree of polynomial  $d_m = 3$ , continue degree  $d_c = 1$



(b) no. of piecewise  $n_p = 2$ , max degree of polynomial  $d_m = 3$ , continue degree  $d_c = 1$

Fig. 2 Form deviation of line feature and approximate piecewise polynomial curve, and residual under different conditions

メータに対応する。また、測定値ベクトル  $\mathbf{D}$  は、測定値  $y_m$  を並べたものとなる。これを式 (5) のように解くと、パラメータの推定値を求めることができる。

$$\mathbf{P} = [a_{1,0} \ a_{1,1} \ \dots \ a_{n_p,d_m}]^T = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{D}) \quad (5)$$

図 2 に区分多項式で近似した例を示す。アルミ板材の表面を 1 mm 間隔で測定した 512 点の測定点から、それぞれ (a) は  $n_p = 5, d_m = 3, d_c = 1$  の条件, (b) は  $n_p = 2, d_m = 3, d_c = 1$  の条件で区分多項式を計算した。上図は測定値と区分多項式, 下図は残差を示し、区分の位置を薄い太線で示す。(a) では低次の曲線であまりよく近似でき、残差もほぼランダムと見なすことができるが、(b) では残差も大きく、残差に位置による相関があることが分かり、目的にあったモデルとなっていない。このように、近似するモデルの条件を決定することが重要である。

## 3. 区分多項式の選択方法

### 3.1 区分多項式の選択の評価基準

前章で定式化した方法で、測定点から区分多項式を最小二乗法によって計算できた。しかし、区分多項式として  $n_p, d_m, d_c$  の 3 つを選択する必要がある。ここでは選択するための評価基準を示す。

線形回帰モデルにおけるモデルの選択方法としては、F 値,  $C_p$  統計量, FPE (Final Prediction Error), AIC (Akaike's Information Criterion) など、残差の大きさに基づいた統計量を使用する方法が知られている<sup>10) 11)</sup>。これらの方法は、主に残差の大きさとパラメータ数の関係からモデルを選択する方法である。また、回帰モデルが正しく機能しているかを評価す

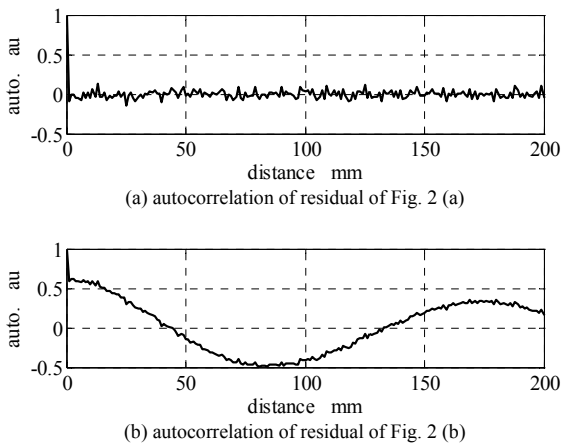


Fig. 3 Autocorrelation functions of residuals from distance of 0 mm to 200 mm

るには、残差が最小二乗法の条件である、互いに独立で正規分布に従っていることを検証する必要がある。正規性の検証方法としては、残差の累積度数分布による KS 検定 (Kolmogorov-Smirnov 検定) および残差の独立性を評価する DW 比による検定 (Durbin-Watson 検定) などが用いられる<sup>11)</sup>。

以上より、モデルを選択する場合の残差の条件として以下の3つをあげることができる。

- (1) 残差の大きさが小さいこと
- (2) 残差の分布が正規分布であること
- (3) 残差に相関がなく、互いに独立であること

(1) の残差の大きさについては、残差の標準偏差を比較することで評価を行う。

(2) の残差の分布については、KS 検定を行う。KS 検定では残差の累積度数分布を、基準とする正規分布の累積度数分布と比較する。累積度数分布の最大の差によって検定を行い、正規分布であることの帰無仮説の有意水準を求めることができる。また、比較の基準として正規分布以外に、同じ形状でパラメータが多いモデルにおける累積度数分布を基準とし、パラメータが少ないモデルにおける累積度数分布と比較することも行った。

(3) の残差の独立性での評価で、DW 比は隣り合う残差の独立性を評価し、値が 2 の場合は自己相関がなく、0 に近づくほど正の相関があることを示す。座標測定では測定値の横座標の間隔は任意に取れるため、隣り合う測定値の独立性を評価するのだけでは不十分と考えられるので、残差の自己相関関数全体を評価することで、残差の独立性を評価することが必要である。図 3 は、図 2 (a), (b) に対応する残差の自己相関関数を 0 mm から 200 mm の測定間隔に対して計算した結果である。(a) では自己相関の 0 mm 以外の相関係数は 0 に近く、測定値の残差間の独立性が認められるが、(b) では測定間隔の広い範囲に渡って高い相関が認められる。そこで、0 mm 以外の相関係数の標準偏差を独立性の尺度として使うことも行った。

### 3.2 モデル選択の実施例

図 4 は、図 2 および図 1 の測定値に対して、 $d_m = 3, d_c = 1$  の条件で区分数  $n_p$  を 1 区分から 10 区分まで変化させたときの評価例である。上図は残差の標準偏差、中図は KS 検定の有意水準で実線は正規分布と破線は  $n_p = 10$  の場合の分布を基準とした、下図は残差の独立性の評価で実線は 0 mm 以外の標準偏差を破線は DW 比を示す。

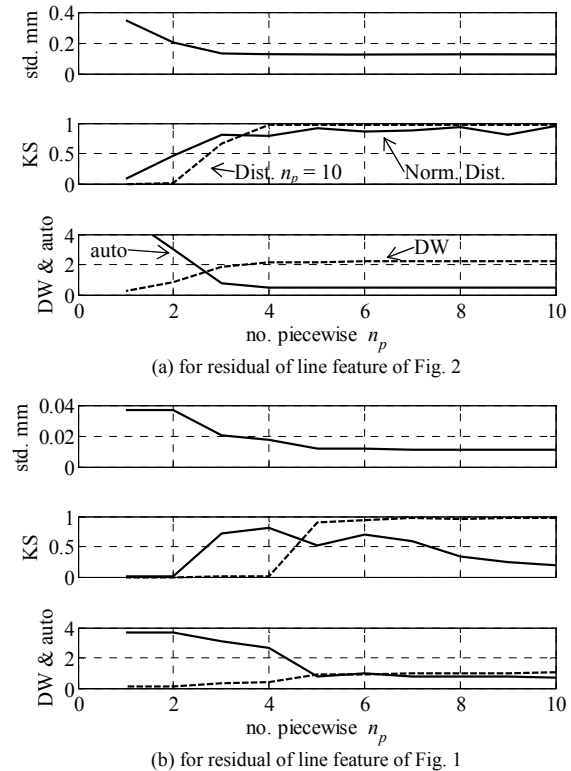


Fig. 4 Relationship between no. piecewise  $n_p$  and, residual, significant level by KS test, DW test and autocorrelation function for residuals of line features

残差の条件を満たしているかどうかは、図 4 の (a) および (b) において、上図で残差が増加する区分数、中図で KS 検定の値が減少する区分数、下図で自己相関の値が増加する区分数および DW 比が 0 に近づく区分数の場所から判断できる。

(a) は (b) に比べて低次の曲線で表すことができ、残差の条件を満たすと認められる区分数は、4 区分以上と考えることができる。(b) は (a) より残差の正規性が悪い場合で、残差の条件を満たすためには 6 区分以上必要と思われる。正規性が悪い場合、正規分布と比較した KS 検定の有意水準はかなり不安定な変化を示し、DW 比も区分数が多い場合でも 0 に近い。

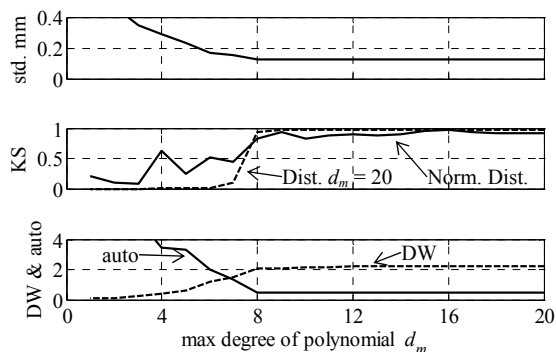
図 5 は、図 4 と同様な評価を、 $n_p = 1, d_c = 1$  の条件で多項式の最高次数  $d_m$  を 1 次から 20 次まで変化させて行った。KS 検定では、正規分布および  $d_m = 20$  の分布との比較を行っている。この例でも (a) が図 2 のデータ、(b) が図 1 のデータに対応する。(a) では 8 次以上、(b) では 14 次以上で残差の条件を満たす。これは図 4 の場合とパラメータ数で見ればほぼ同じ条件となる。

実際の直線形状に対しては、以上のような評価を総合的に見て、どのような区分多項式を直線形体の形状偏差モデルとして選択するかを決める必要がある。次章に述べる信頼性の評価のことを考えると、使用する多項式の次数  $d_m$  は低いほうが好ましい。また、連続する次数  $d_c$  は 1 もしくは 2 程度で充分であることが多い。

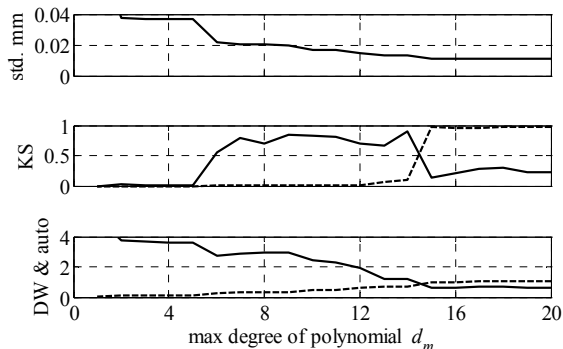
## 4. 形状偏差モデルの信頼性

### 4.1 形状偏差モデルの信頼性の計算

前章の方法で選択した直線形体の形状偏差モデルにおいて、2 章の方法でパラメータを求めることができる。求めたパラ



(a) for residual of line feature of Fig. 2



(b) for residual of line feature of Fig. 1

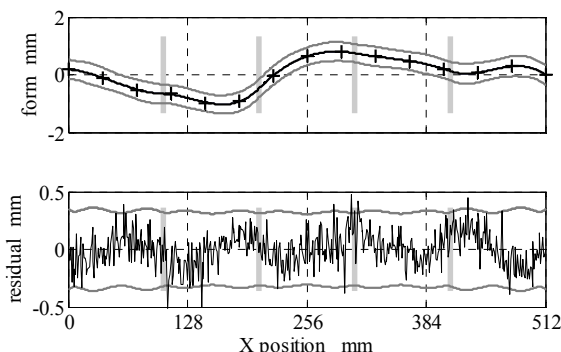
Fig. 5 Relationship between max degree of polynomial  $d_m$  and, residual, significant level by KS test, DW test and autocorrelation function for residuals of line features

メータの分散共分散やパラメータから決まる形状偏差モデルの信頼性は、誤差伝播を利用して推定することができる<sup>5)12)</sup>. 各測定点の残差の標準偏差を  $s_r$  とすると、最小二乗法で求めたパラメータ  $\mathbf{P}$  の分散共分散行列  $\mathbf{S}_p$  は式 (6) で計算できる. これを使うと、計算されたモデルの各点における誤差の分散共分散行列  $\mathbf{S}_m$  は式 (7) で計算できる. ここで  $\mathbf{E}$  は単位行列,  $\mathbf{A}_e$  は信頼性を評価したい位置におけるヤコビ行列であり,  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{A}_e$  は同一である必要はない. そこで,  $\mathbf{A}_e$  を測定範囲以外の点へ設定することで、測定範囲外や測定していない位置における信頼性を評価することもできる.

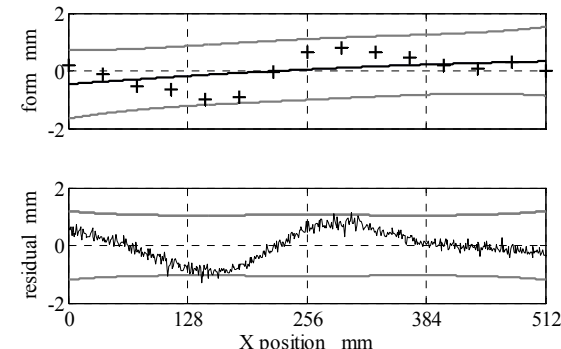
$$\mathbf{S}_p = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1} s_r^2 \tag{6}$$

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{A}_e \mathbf{S}_p \mathbf{A}_e' + s_r^2 \mathbf{E} \tag{7}$$

図6に図2の測定値から等間隔に15点 ( $n_m = 15$ ) の測定点 (+印) によって、(a) は  $n_p = 5, d_m = 3, d_c = 1$ , (b) は  $n_p = 1, d_m = 2, d_c = 1$  の条件で区分多項式を計算した結果を示す. それぞれの上図は測定点および計算結果をそれぞれ実線で示し、その0 mm から512 mm の範囲における信頼性の幅 (標準偏差の2倍) を太線で示している. また下図は、信頼性の幅と測定していない点を含めた残差の比較である. (a) および (b) とともに残差が信頼性の幅に、おおよそ入っていることが分かる. (b) は残差の相関が大きく3章で示した選択基準を満たしていない例であるが、前報でも示したように、測定点を等間隔で取った場合や測定点の間隔が広い場合は、残差の相関の影響はあまりないので、残差は信頼性の幅には入っている. しかし、信頼性の幅は、(a) に比べると4倍程度と大きくなっている.



(a)  $n_m = 15, n_p = 5, d_m = 3, d_c = 1$



(b)  $n_m = 15, n_p = 1, d_m = 2, d_c = 1$

Fig. 6 Interpolation test: form deviation of line feature of Fig. 2 and approximate piecewise polynomial curve with confidential zone ( $2\sigma$ ) under different conditions

#### 4.2 外挿部分での信頼性

図7は、測定点を20 mm から492 mm の範囲に均等に15点取り、外挿した部分を含めて0 mm から500 mm における信頼性を評価した例である. (a) は区分数が5で3次多項式、(b) は区分数が1で9次多項式により近似している. どちらも残差の条件を満たしている. 外挿した部分は、信頼性が悪化するが正しく信頼性を評価できていることが分かる. (a) と (b) を比較すると、(b) の外挿部分では信頼性がより低くなる. このことから、外挿部分に対しては多項式の次数は低くしたほうが安定な結果になることが分かる.

図8は残差の条件を満たさない場合で、区分数が1で2次多項式により近似している. (a) では15点、(b) では100点の測定点を40 mm から472 mm の範囲に設定した. この場合でも、信頼性の幅は広がるが測定点が少ない場合は、残差は信頼性の幅に入っている. しかし、測定点が多くなると、外挿部分で残差が信頼性の幅から出ていることが分かる. これは、前報でも示したように、測定点が多いほうが測定点の相関の影響が大きく現れ、モデルが間違っている効果が出ることによる.

#### 5. 考察および結論

本論文では、形体測定における不確かさ推定において、直線形体を扱う場合について検討した. 直線形体は、その加工などの条件などを考えて、形状偏差を区分多項式でモデル化することを提案し、その方法の定式化を行った. さらに、測定値から形状偏差モデルの信頼性の幅を計算する手法を定式化した.

これらの結果から、形状偏差モデルを選択する場合の指針として以下のことが言える.

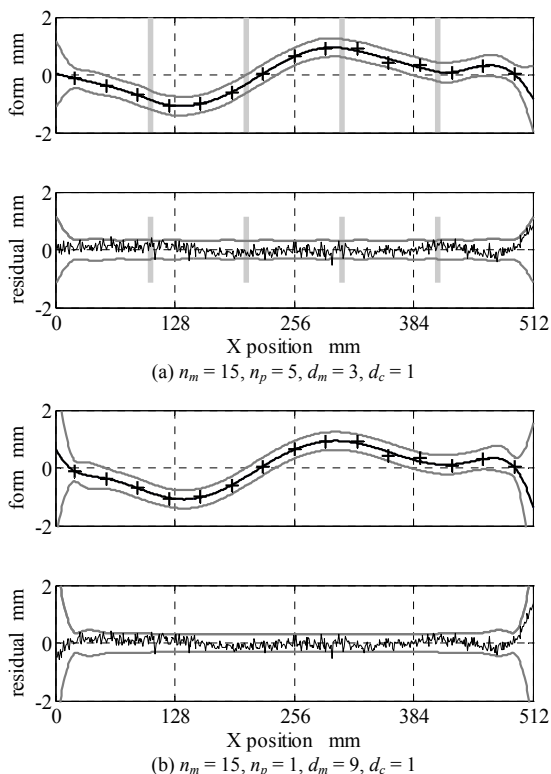


Fig. 7 Extrapolation test 1: form deviation of line feature of Fig. 2 and approximate piecewise polynomial curve with confidential zone ( $2\sigma$ ) in extrapolation area (0-20 mm and 492-512 mm) under different conditions

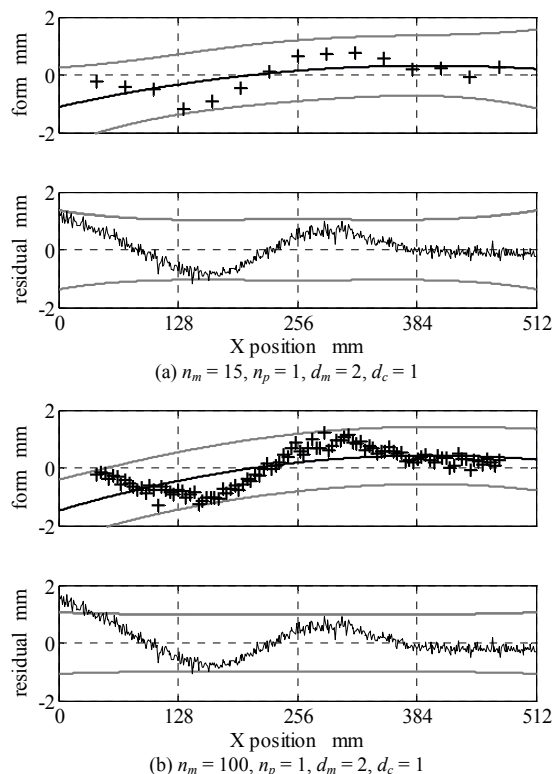


Fig. 8 Extrapolation test 2: form deviation of line feature of Fig. 2 and approximate piecewise polynomial curve with confidential zone ( $2\sigma$ ) in extrapolation area (0-40 mm and 472-512 mm) under different conditions

- (1) 区分多項式のモデルを選択する場合に、残差の標準偏差、残差の自己相関関数、残差の累積度数分布を利用してモデルを評価できる。
- (2) 信頼性の評価において、区分多項式の次数は低いほうが、特に外挿した場合に安定した信頼性の幅が計算できる。

今後は、一般的な加工方法に対するモデル化する手法などを含めて、複雑な測定における測定の不確かさの推定方法を確立することを目指す。

参 考 文 献

- 1) 高増 潔, 郭 必偉, 古谷涼秋, 大園成夫: 形体計測の基本概念, 精密工学会誌, **64**, 1 (1998) 94.
- 2) Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM). BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, OIML, 1st edition, 1995.
- 3) A. Wechenmann, M. Knauer and H. Kunzmann: Influence of Measurement Strategy on the Uncertainty of CMM-Measurements, CIRP Ann., **47**, 1 (1998) 451.

- 4) 高増 潔, 阿部 誠, 古谷涼秋, 大園成夫: 形体計測における不確かさの見積り (第 1 報) - 校正作業で生じる系統誤差の寄与 -, 精密工学会誌, **67**, 1 (2001) 91.
- 5) 高増 潔, 野坂健一郎, 阿部 誠, 古谷涼秋, 大園成夫: 形体計測における不確かさの見積り (第 2 報) - 円形体の計測における形状偏差の寄与 -, 精密工学会誌, **69**, 5 (2003) 693.
- 6) 野坂健一郎, 高増 潔, 古谷涼秋, 大園成夫: 形体測定における不確かさ評価 (第 4 報) - 平面形体の測定 -, 2002 年度精密工学会秋季大会学術講演会講演論文集, (2002) M02.
- 7) G. Belforte et al.: Coordinate measuring machines and machine tools selfcalibration and error correction, Ann. CIRP, **36**, 1 (1987) 359.
- 8) W. Ma and J. P. Kruth: Parameterization of randomly measured points for least squares fitting of B-spline curves and surfaces, Computer-Aided Design, **27**, 9 (1995) 663.
- 9) J. A. Soons: Accuracy analysis of multi-axis machines, PhD thesis, The Eindhoven technical university (1993).
- 10) 久米 均, 飯塚悦功: 回帰分析, 岩波書店 (2003).
- 11) 中川 徹, 小柳義夫: 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, (1982).
- 12) 阿部 誠, 高増 潔, 大園成夫: 空間座標の比較測定による CMM の校正 (第 2 報) - パラメトリックエラー推定値の信頼性 -, 精密工学会誌, **66**, 4 (2000) 578.