精密工学会誌，64（4），1998，pp.557-561

最小領域法の座標計測における統計的評価*

高増　潔**　　古谷涼秋***　　大園成夫**

Statistical Evaluation of Minimum Zone Method in Coordinate Metrology

Kiyoshi TAKAMASU, Ryoshu FURUTANI and Shigeo OZONO

Minimum zone method, minimum circumscribing method and maximum inscribing method are used for calculation of form deviations and determination of datum system in ISO and JIS standards. However, there are no researches for statistical evaluations of results from these methods. This is mainly because the results from these methods are determined by positions of only few contact points. The novel statistical evaluation method for minimum zone method has been proposed in this article. The average and the distribution of the maximum order of measured points are calculated from the probability density function and the cumulative distribution function of measured points. From the distribution of maximum order of the measured points, the range of maximum value and minimum value of measured points are calculated. For the straight lines, the limits and the distribution of the slope of the line are also calculated using these methods. The series of simulations for minimum zone method of straight lines show that the methods in this paper are useful to estimate the results of minimum zone method.

Key words: minimum zone method, coordinate metrology, coordinate measuring machine, least squares method, uncertainty of measurement

1. はじめに

形状計測，データムの設定などにおいて，最小領域法，最小外接法，最大内接法などに代表される接触法が ISO および JIS 規格で採用されている．これは，機械部品の機能が他の機械部品との接触状態によって決定されること，および一般的な機械計測で安定な計測をするには接触法が優れていることなどにより，歴史的に採用されてきた [1)]．

一方，座標計測においては座標測定機（Coordinate Measuring Machine）によって測定された離散的な測定点で表される抽出形体（extracted feature）からあてはめ形体（associated feature）を計算し，あてはめ形体の形体間演算によって必要な測定値である寸法，角度，位置などを計算する．あてはめ形体の計算には，普通は最小二乗法が利用されている．これは，測定点の数が少ない場合や離散測定による測定の場合に接触法がうまく機能しないことや，測定の不確かさの影響を評価できないことなどによる [2) 3)]．

従来，最小領域法に関してはその計算手法が理論的にも実際の測定データに関しても種々の研究 [4) ~ 8)] がなされていて，計算が遅いとか計算が難しいなどの批判は意味がなくなっている．しかし，測定の不確かさに関しては，接触法が接触した数少ない点の位置によって決まるため，統計的に評価が難しいので，測定の不確かさを理論的に検討した研究はなされていない．

しかし，国際的には，すべての測定結果に対して合理的な測定の不確かさを与えることが重要となってきている．そこで，本論文では，最小領域法などの接触法のふるまいを統計的に解析し，その測定の不確かさを推定することを試みる [1) 2)]．以下のことを明らかにする．

（1）　測定点が少ない離散測定において，接触法を統計的に解析する．

（2）　各測定点の標準偏差（測定の不確かさ）が，接触法による測定結果にどのように影響するかを解析する．

（3）　このような解析から，接触法の統計的な性質を明らかにする．

*　原稿受付　平成 9 年 9 月 3 日

**　正 会 員　東京大学工学系研究科（東京都文京区本郷 7-3-1）

***　正 会 員　東京電機大学工学部（東京都千代田区神田錦町 2-2）

2. 離散測定における接触点の推定

2.1 基礎的な統計的評価の考え方

座標計測では，接触法の対象となる面（平面，球面，円筒面など）を連続的に大量に測定することは測定時間，データ量，データ処理時間の関係から難しく，一般的には，離散的で少ない測定点から形体を計算する．このような離散的で少ない測定点に対して，接触法を行う場合について接触点の統計的な性質を検討してみる．

まず，簡単化のために対象を二次元空間内における直線形体とし，この直線形体上を n 個の等間隔な測定点で測定した場合を考える．直線形体は，$y=0$ の長さ a の直線に対して平均 0 で標準偏差 1 の確率密度関数 $p(y)$ で表現される表面の凹凸（形状偏差）を持つとする（**図 1** 参照）．この章での検討には，測定値の横方向の情報は関係なく，単に確率密度関数のみによって特長付けられるが，次章の検討を含めて直線形体を対象とする．また，標準偏差を測定点の不確かさと解釈するば，以降の検討は測定点の不確かさの測定結果へ与える影響を検討していることとなる．

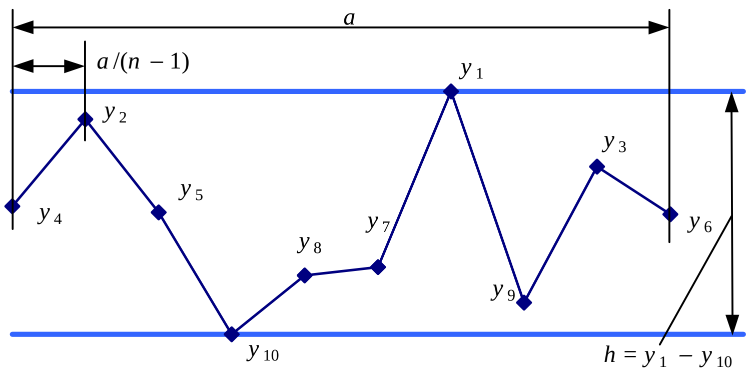


Fig. 1　Orders of measured points (y_1 - y_{10}) and width h in straight line (length = a)

確率密度関数 $p(y)$ と累積分布関数 $q(y)$ には，以下の関係がある．

$$q(y)=\int_{-\infty}^{y}p(t)\,dt \tag{1}$$

はじめに，直線形体を X 軸に平行な 2 本の直線で挟んだときの幅 h を計算する．この幅は測定値の範囲であり，Y 軸に垂直方向の一方向の真直度である．また，直線形体に対して形状偏差が十分小さい場合には，方向を定めない場合の最小領域法の真直度と解釈できる．まず，n 個の測定点を大きい順に並替える．このときの測定点の順序を測定点の順位ということにする．一番大きい測定点（順位 1 の測定点）は次のような分布 $p_1(y)$ を持つ [9]．

$$p_1(y)=n\,(q(y))^{n-1}\;p(y) \tag{2}$$

これは，測定値が y の測定点が順位 1 であるときは，測定値が y より小さい測定点が $n-1$ 個存在するからである．そこで，この分布から順位 1 の測定値の平均値 ey_1 および標準偏差 sy_1 が式（3）および（4）のように求められる．

$$ey_1=n\int(q(y))^{n-1}\;p(y)\,y\,dy \tag{3}$$

$$sy_1^2=n\int(q(y))^{n-1}\;p(y)\,(y-ey_1)^2\,dy \tag{4}$$

次に，これを一般化して n 個の測定点で順位 i の測定点の分布 $p_i(y)$ を求める．$p_i(y)$ は，測定値が y より大きい測定点が $i-1$ 個存在し，測定値が y より小さい測定点が $n-i$ 個存在することより式（5）で表現される．また，その平均値 ey_i は式（6）で表現される．ここで，${}_nC_k$ は順列組合せの数（式（7））を示す．

$$p_i(y)={}_nC_i\;{}_iC_{i\text{-}1}\,q^{n-i}(y)\,(1-q(y))^{i-1}\;p(y) \tag{5}$$

$$ey_i={}_nC_i\;{}_iC_{i-1}\int q^{n-i}(y)\,(1-q(y))^{i-1}\;p(y)\,y\,dy \tag{6}$$

$${}_nC_k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdots1} \tag{7}$$

図 2 は，確率密度関数が平均 0，標準偏差 1 の正規分布で，測定点の数 $n=5$ に対する順位 1 から順位 5 の各測定点の分布 $p_1(y)$ ～ $p_5(y)$ を示している．このような分布を基礎として，接触法の統計的な解析を行う．**図 3** は，同様な計算を平均値 0，標準偏差 1 である三角分布（図 3（a）），正規分布を二次関数で近似した分布（以下，二次的分布という）（図 3（b）），一様分布（図 3（c））に行った例である．各分布は，以下の式で表せる（正規分布：式（8），三角分布：式（9），二次的分布：式（10），一様分布：式（11））．

$$p(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \tag{8}$$

$$p(y)=\begin{cases}\frac{1}{6}\left(\sqrt{6}-|y|\right) & |y|\le\sqrt{6}\\ 0 & |y|>\sqrt{6}\end{cases} \tag{9}$$

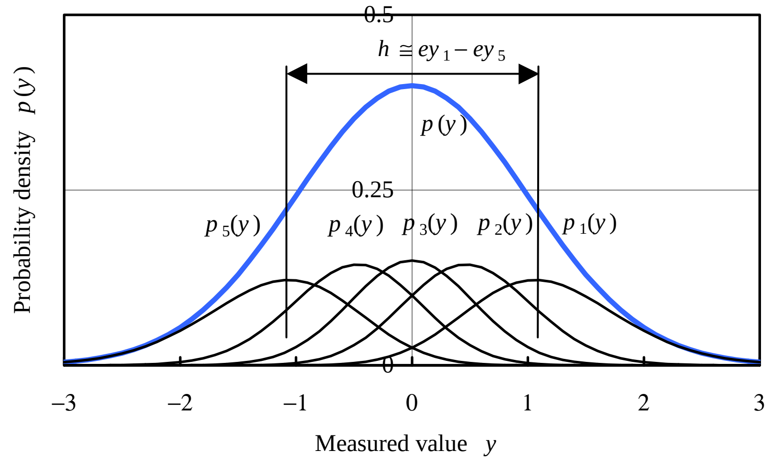
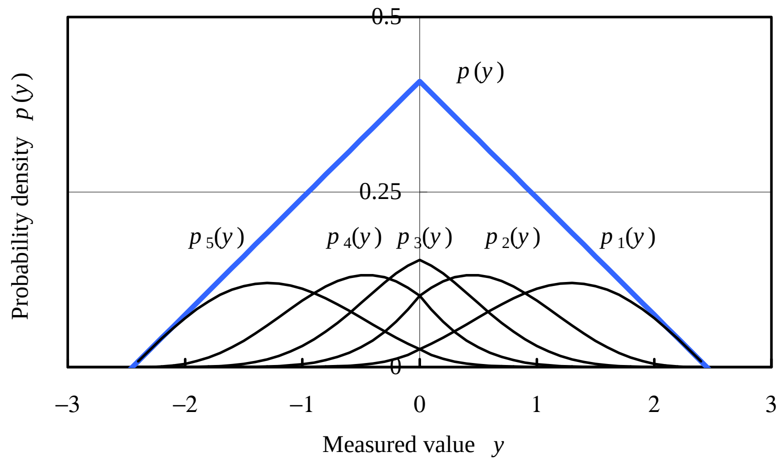
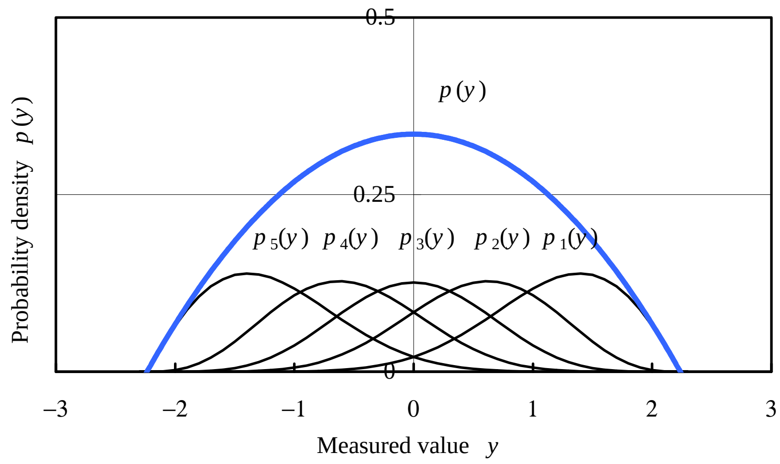


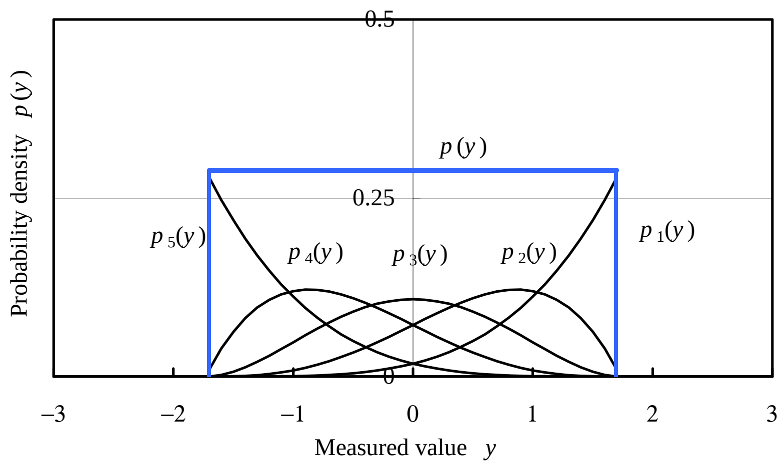
Fig. 2 Probability density $p_1(y)$ - $p_5(y)$ of each order of measured points by normal distribution function (number of measured points = 5)



(a) Triangluar distribution function



(b) Quadratic distribution function



(c) Uniform distribution function

Fig. 3 Probability density of each order of measured points for triangluar, quadratic and uniform distribution functions (number of measured points = 5)

$$p(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4\sqrt{5}}\left(1-\dfrac{y^2}{5}\right) & |y|\le\sqrt{5} \\ 0 & |y|>\sqrt{5}\end{cases} \qquad (10)$$

$$p(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{3}} & |y|\le\sqrt{3} \\ 0 & |y|>\sqrt{3}\end{cases} \qquad (11)$$

2.2　最大値と最小値の差の計算

ここで，順位 1 と n の測定値の差が直線形体を Y 軸に平行な 2 つの直線で挟んだ場合の幅 h となる（図 1 参照）．幅 h の分布 $p(h)$ は，y_1 および y_n の間隔が h 離れている条件と，y_1 と y_n の間に $n-2$ 個の測定点が存在する条件のそれぞれの条件付き確率より式（12）で表される．また，幅 h の平均 eh は $p(h)$ と y の積を積分することで得られる．しかし，この式はかなり複雑で煩雑なものとなるので，式（3）を利用して式（13）のように ey_1 と ey_n の差でよい近似を与えることができる．

$$p(h)={}_nC_2\int(q(y)-q(y-h))^{n-2}\;p(y)\;p(y-h)\,dy \qquad (12)$$

$$\begin{aligned} eh &= \int p(h)\,h\,dh \\ &\cong ey_1-ey_n=2ey_1=2n\int(q(y))^{n-1}\;p(y)\;y\,dy \qquad (13)\end{aligned}$$

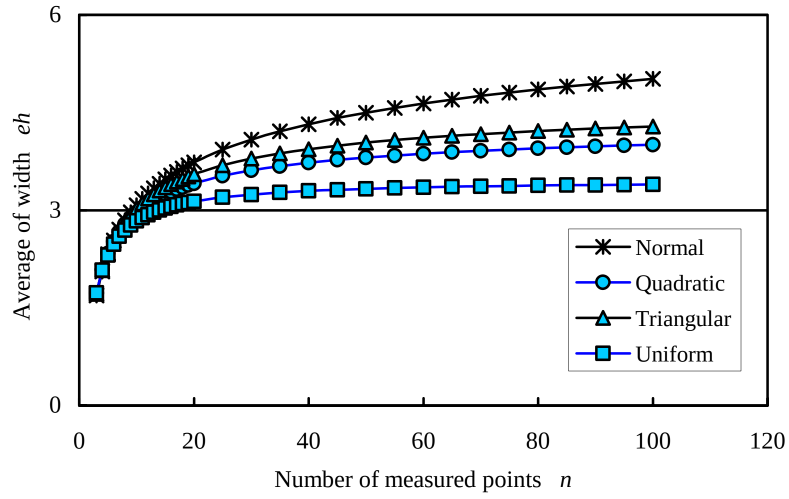
また，幅 h の標準偏差 sh は，同様に計算できるが，やはりかなり煩雑な式となるので，順位 1 と n の測定値の標準偏差より推定するほうが簡単である．この近似は，n が小さいところでは，測定点に相関があるため大きめの値を示すが，n が大きい範囲ではやはりよい近似を示す．

$$\begin{aligned} sh^2 &= \int b(h)\,(h-eh)^2\,dh \\ &< sy_1^2+sy_n^2=2sy_1^2 \\ &=2n\int(q(y))^{n-1}\;p(y)\,(y-ey_1)^2\,dy \qquad (14)\end{aligned}$$

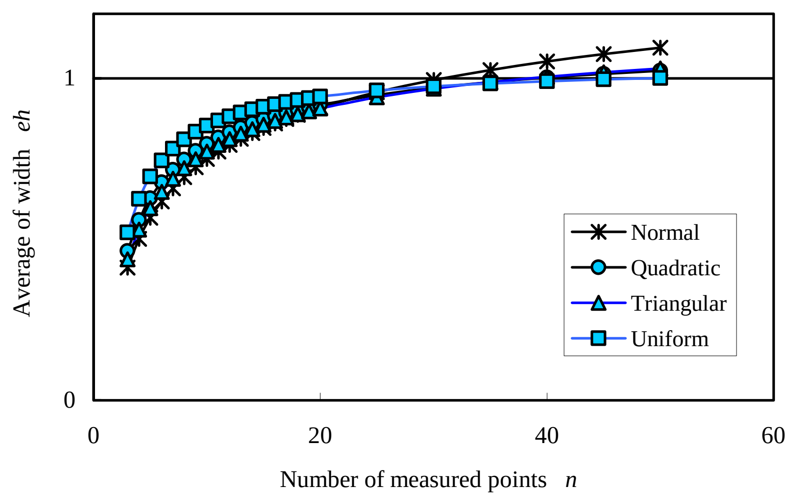
図 4（a）は，確率密度関数が平均 0，標準偏差 1 の各分布に対する eh と測定点の数 n の関係を式（13）の近似式によって計算したものである．分布によって収束する値に違いがある．また，正規分布の場合は n が無限の場合，eh も無限となる．図 4（b）は，各分布の累積分布関数の値が 0.98 となる y 値で図 4（a）のグラフを正規化したものである．分布によらず大体同一の値を示すことが分かる．累積分布が 0.98 というのは，正規分布を除いてほぼ分布の上限値に近い．これは，接触法の計算手法が分布の上限値および下限値に影響されることを示している．

最小二乗法では分布の平均および標準偏差によって，計算結果の信頼性などが評価できたが，接触法では分布の上限値および下限値が重要となる．しかし，平均や標準偏差と違って分布の上限値や下限値は分布のすそ野に大きく影響され，分布がはっきり分かっていない場合には接触法の値を統計的に推定することは難しい．

図 5 は二次的分布に対して，式（14）によって計算した sh を利用して $eh \pm sh$ と $eh \pm 2sh$ の範囲を示している．また，$n=100$ のときの eh に対して 90%および 80%の線を破線で示している．この場合，範囲の下限 $eh-sh$ が $n=100$ における eh の 90%以上を得るには測定点を 60 個以上，80%以上を得るためには測定点を 30 個以上必要であること，下限 $eh-2sh$ に対しては，



(a) Befor normalization



(b) Normalization by cumulative distribution function $q(y)=0.98$

Fig. 4　Relation between average of width eh and number of measured points n

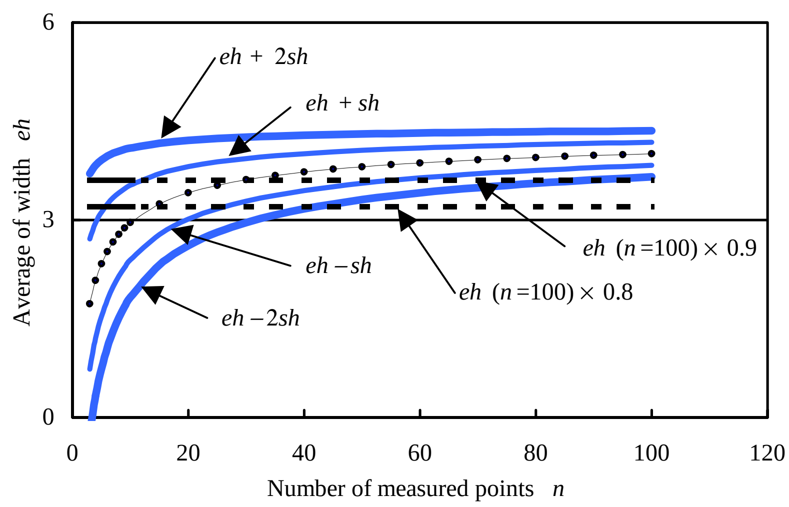


Fig. 5　Average of width eh with standard deviation sh

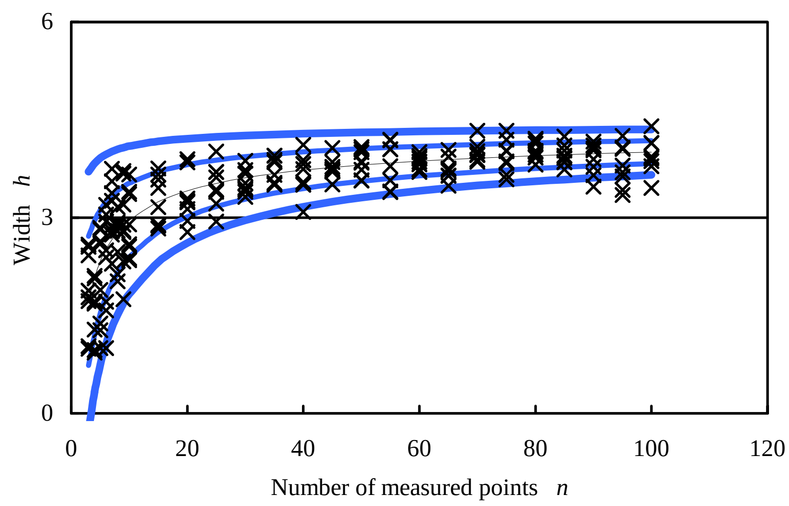


Fig. 6　Simulation of width h and average of width with standard deviation

90%以上では 90 点以上，80%以上では 45 点以上必要であることが分かる．最小二乗法と比較すると，かなりたくさんの測定点が必要となり，座標計測においては測定の効率化の上で大きな問題となる．

図 6 は，以上の理論を確認するために行ったシミュレーションの結果である．二次的分布により n 個の測定点を作り，それぞれ 10 組に対して $y_1 - y_n$ をプロットした．図 5 の範囲とシミュレーション結果がよく一致していることが分かる．

3.　直線形体の真直度の計算

3.1　直線形体の最小領域の計算手法

直線形体の真直度の計算に対して，前章と同様の解析を行う．**図 7** は，直線形体を 2 つの平行な直線で挟んで真直度を計算する方法を示している．ここでは，計算手法として CLRS（Control Line Rotation Scheme）[10] を用いた．この手法では，まず，2 つの平行な直線で直線形体を挟む．この状態は，2 章で検討した最大値と最小値の関係となっている．つぎに，接触点でその直線をもう一つの接触点の方向へ回転する．回転した結果（破線で表される），別の接触点に接触したとき，回転量が小さい方を採用する．このようにして作られた 2 点の間に逆側の接触点があれば，これで最小領域が決定する．

図 7（a）の例では上側の直線の回転量が小さいので上側の直線が採用され，下側の一点（□印）が上側の 2 点（○印と×印）の間にあるため，この 3 点が最小領域を決定する．図 7（b）の例では，上側の接触点の間に下側の接触点がないので，この状態から同様の作業を繰り返し，上側の×印と△印の点（一点鎖線）および下側の□印の点で最小領域が決定される．

3.2　採用される測定点の順位

この方法を測定点の順位を考慮して考えると，まず最初の接触状態は，y_1 と y_n で接触する．つぎの回転では，上側では y_2，y_3 などが，下側では y_{n-1}，y_{n-2} などが採用される．このため，大部分の例では 3 つの接触点の内の 2 つは，順位 1 と n の測定値となり，3 つめの接触点は，順位 2 もしくは順位 $n-1$ の測定値となることが多い．

このことを確かめるために，シミュレーションを行った．**図 8** は，等間隔な測定点 n を平均 0，標準偏差 1 の二次的分布で発生し，その直線形体を CLRS 法で最小領域を求めた場合，3 つの接触点のうち，2 つの接触点が存在した側の 2 つの接触点の順位を調べたものである．分かりやすくするため，必ず直線の上側で 2 点接触するように，下側で接触する場合は，上下を反対にして計算している．

この例で分かるように，約 50%が順位 1 と 2 の測定点，また 20%が順位 1 と 3 の測定点の組合せ，10%が順位 1 と 4 の測定点の組合せとなり，その他の例は少ない．この比率は，次のように考えることで説明できる．**図 9** に示すように，まず順位 1 と 2 の測定点が k_2 だけ離れているとして，この 2 つの点を結ぶ．この線に対して順位 3 の測定点が下にある場合（順位 3 の点が k_3 の範囲にある場合）には，順位 1 と 2 の組が使われる．この比率 k_3 は，順位 1 と 2 の測定点の大きさの差 d_2 および順位 1 と順位 3 の大きさの差 d_3 との関係で決定される．

分布まで考えるのは大変なので，大きさの差の平均値 $d_2 = ey_1 - ey_2$ および $d_3 = ey_1 - ey_3$ を利用すると，どちらが採用されるかの比 k_3 は，式（15）となる．

$$k_3 = \frac{d_3}{k_2 d_2} \cong \frac{ey_3 - ey_1}{k_2(ey_2 - ey_1)} \qquad (15)$$

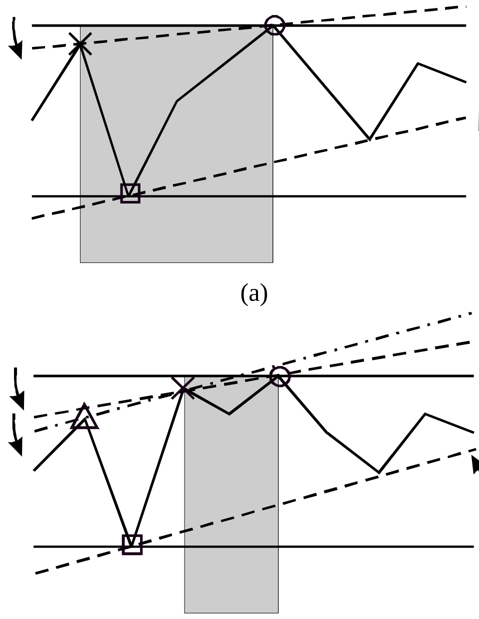


Fig. 7　Concept of CLRS (Control Line Rotation Scheme) [10]

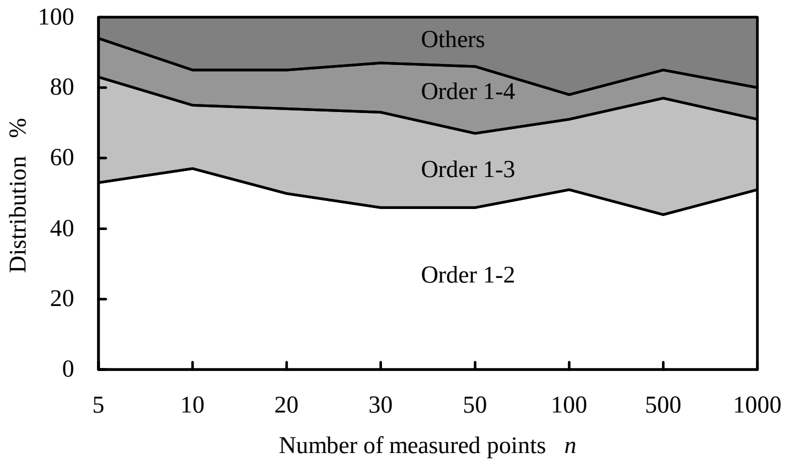


Fig. 8　Distribution of orders of measured points for straight line by minimum zone method

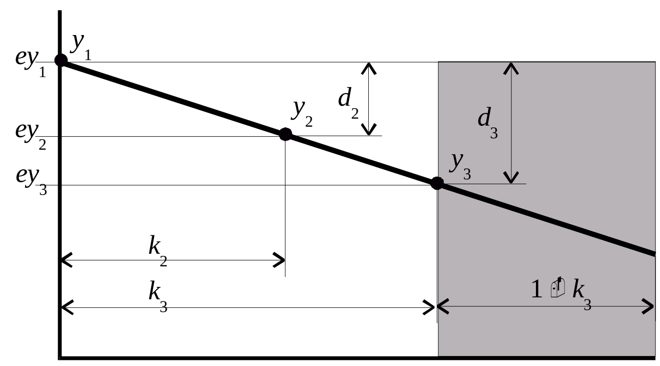


Fig. 9　Relation between positions of order 1st, 2nd and 3rd measured points for distribution of orders

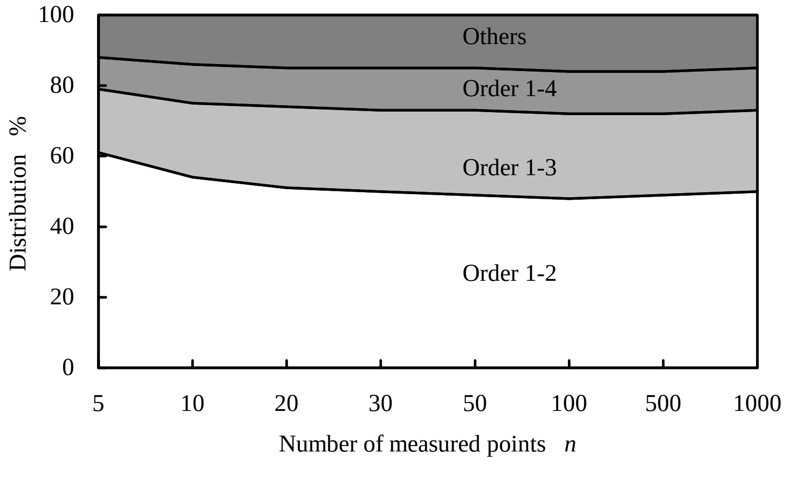


Fig. 10　Distribution of orders of measured points for straight line from equation (15)

ここで，k_2 は平均的な測定点の間隔である．実際の分布を計算するには，順位 1 と 2 の組合せと順位 1 と 4 および順位 1 と 3 の組合せと順位 1 と 4 などの関係を考え，それぞれに対する k_2 を適当な値に設定する必要がある．しかし，k_2 の値などは測定値の確率密度関数および，測定値の横方向の相関などと関連して簡単には定式化できない．**図 10** は図 8 と合うように k_2 などの値を適当に設定した計算例である．種々の分布への対応は今後の課題と考えている．

3.3　直線の傾きの分布

順位 1 と 2 を結ぶ直線の傾き c の分布 $p(c)$ について考えてみる．傾き c の分布には，順位 1 と 2 の測定点の相関が影響するがそれを無視すると，2 つを結ぶ直線の傾きの分布は，式(16)の積分で表される．

$$p(c) = \iiint p_1(y)\, p_2(y - c(a_1 - a_2))\, dy\, da_1\, da_2 \qquad (16)$$

しかし，この積分はかなり複雑で積分範囲も複雑となり数値的にも簡単に計算できない．また，この分布の標準偏差 sc も簡単には計算できないが，順位 1 の測定点の標準偏差 sy_1 によって式（17）のように近似できる．

$$sc^2 = \int p(c)\, c^2\, dc \cong \frac{sy_1 + sy_2}{a} \cong \frac{2sy_1}{a} \qquad (17)$$

ここで，a は直線の長さである．最終的には，図 8 の分布を考慮すると直線の傾きの分布の標準偏差は，式（18）で表現される．

$$sc \cong \frac{k}{a} sy_1 \qquad (18)$$

ここで，k は適当な係数であるが，この値の決定については図 8 の分布などが影響するため今後の課題と考えている．

図 11 は，計算機によって二次的分布で直線形体を作り，計算された 100 組の直線の傾きパラメータ c のうち 30 個をプロットしたものである．細い実線は，100 組から計算した $ec \pm sc$ および $ec \pm 2sc$ で，内側の太線は式（17）を使って $k = 3$ で近似した sc の 2 倍の値を示している．シミュレーション結果の $ec \pm 2sc$ とよく一致していることが分かる．また，外側の太線は $k = 3$ で近似した sc の 3 倍の値を示していて，分布の上限に近い値を与えられていることが分かる．

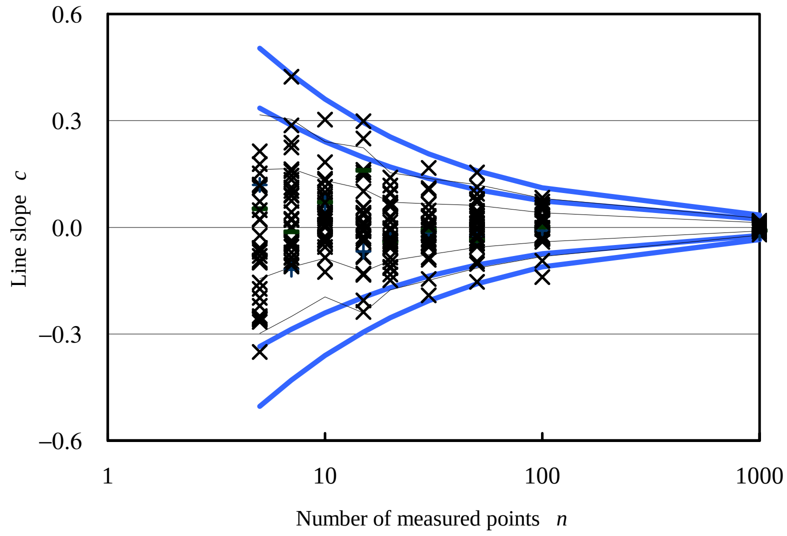


Fig. 11　Distribution of line slope and estimations by equation (17)

4.　ま　と　め

本論文では，座標計測における最小領域法の統計的評価の方法を提案した．まず，測定値の範囲の統計的推定方法として，順位が 1 の測定点の分布を統計的に求めた．この分布を利用することで測定点の範囲と測定点の数の関係を定式化することができた．この範囲は，平面度，真円度などにも同様の考え方で適応できると考えている．

さらに，測定点の範囲は測定点の確率密度関数の上限，下限もしくはすそ野の形によって決定されることを示した．これによれば，最小領域法による形状精度の決定にはかなり多くの測定点が必要になることを明らかにした．

つぎに直線形体の傾きパラメータの性質について検討を行った．このパラメータの分布は，順位 1 と 2 の測定点の分布によって推定できることを示した．しかし，パラメータの分布を推定することはかなり難しく，測定値との分布などとの関係は今後の課題となった．これは，平面の傾き，円の直径や中心位置などの検討に対しても同様の問題となる．

以上のような検討により，従来あまり行われていなかった最小領域法に対する統計的評価の基本的な方法を定式化し，以下の結論が得られた．

（1）　測定値の範囲は，測定点を大きさの順序で並べた測定点の順位および順位 1 の測定点の分布によってその性質を示すことができた．

（2）　最小領域法で求めた，直線形体の傾きのパラメータの統計的性質を推定し，順位 1 の測定点の標準偏差によって，傾きパラメータの範囲を表した．

参　考　文　献

1) D. J. Whitehouse: Handbook of Surface Metrology, Philadelphia & London, Institute of Physics, (1994).

2) 高増　潔，古谷涼秋，大園成夫：座標計測における形体パラメータの信頼性，精密工学会誌，**63**，11（1997）1594.

3) 高増　潔，郭　必偉，古谷涼秋，大園成夫：形体計測の基本概念，精密工学会誌，**64**，1（1998）94.

4) T. S. R. Murty and S. Z. Abdin: Minimum Zone Evaluation of Surfaces, Int. J. Mach. Tool. Des. Res., **20** (1980) 123.

5) J-Y Lai and I-H Chen: Minimum Zone Evaluation of Circles and Cylinders, Int. J. Mach. Tool. Des. Res., **36**, 4 (1996) 435.

6) T. S. R. Murthy: A Comparison of Different Algorithms for Cylindricity Evaluation, Int. J. Mach. Tool. Des. Res., **22**, 4 (1982) 283.

7) 塚田忠夫，金田　徹，奥田謙造：最適化技法を用いた最小領域真円度の評価法，精密機械，**49**，10（1983）1351.

8) 金田　徹：シミュレーションによる最小外接中心法および最大内接中心法真球度の算出，精密工学会誌，**61**，5（1995）646.

9) 森口繁一：確率表現関数，東京大学出版会，(1995).

10) S.T. Huang, K. C. Fan and H. Wu John: A New Minimum Zone Method for Evaluating Straightness Errors, Precision Engineering, **15**, 3 (1993) 158.